

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Charles CRUSSARD

1^{re} THÈSE

**Etude rhéologique du fluage
et de l'hystérésis mécanique des matériaux**

2^e THÈSE - **Propositions données par la Faculté**

Soutenues le 14 mars 1963 devant la Commission d'examen

MM. CHAUDRON, Président

FRIEDEL }
MAZET } Examineurs

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Charles CRUSSARD

1^{re} THÈSE

**Etude rhéologique du fluage
et de l'hystérésis mécanique des matériaux**

2^e THÈSE - **Propositions données par la Faculté**

Soutenues le 14 mars 1963 devant la Commission d'examen

MM. CHAUDRON, Président

FRIEDEL }
MAZET } Examineurs



Faculté des Sciences de l'Université de Paris

PROFESSEURS

Doyen M. ZAMANSKY

MM. G. JULIA T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	MM. VASSY T	Physique de l'atmosphère.
DE BROGLIE .. T	Théories physiques.	DESTOUCHES.. T	Théories physiques.
PRENANT T	Anatomie et Histologie comparées.	AMIEL T	Chimie générale.
GRASSÉ T	Evolution des êtres organisés.	HOCART T	Minéralogie et cristallogr.
PRÉVOST T	Chimie organique.	J.-P. MATHIEU T	Physique (optique).
CHAUDRON .. T	Chimie appliquée.	COUTEAUX .. T	Biologie animale (P.C.B.).
WYART T	Minéralogie et cristallogr.	MAY T	Zoologie (Orsay).
TEISSIER T	Zoologie.	CHOQUET T	Théorie des fonctions et topologie.
MANGENOT .. T	Biologie végétale (Orsay).	FELDMANN .. T	Biologie végétale marine.
P. AUGER .. T	Physique quantique et relativité.	GUINIER T	Physique des solides (Orsay).
MONNIER T	Physiologie générale.	JOST T	Physiologie comparée.
PIVETEAU T	Paléontologie.	FORTET T	Calcul de probabilités et physique mathématique.
ROCARD T	Physique (E.N.S.).	SCHWARTZ .. T	Calcul différentiel et intégral.
H. CARTAN .. T	Mathématiques (E.N.S.).	CHOUARD .. T	Physiologie végétale.
LAFFITTE T	Chimie générale.	MALAVARD .. T	Aviation (techn. aéronaut.)
FAVARD T	Géométrie supérieure.	BRELOT T	Calcul différentiel et intégral.
COULOMB T	Physique du globe.	NORMANT .. T	Synthèse organique générale.
Mlle COUSIN.. T	Biologie animale (S.P.C.N.).	BENARD T	Chimie minérale
CHRÉTIEN .. T	Chimie minérale.	BUVAT T	Botanique (E.N.S.).
P. DRACH.... T	Zoologie.	DUGUÉ T	Statistiques mathématiques.
KASTLER T	Physique (E.N.S.)	SOULAIRAC .. T	Psychophysiologie.
EPHROSSI ... T	Génétique.	ULRICH T	Physiologie végétale
RIVIÈRE T	Géologie S.P.C.N. et sédim.	MARÉCHAL .. T	Optique théorique et appliquée.
GAUTHERET .. T	Biologie végétale (P.C.B.)	KIRRMANN .. T	Théories chimiques.
R. LUCAS T	Recherches physiques.	CHADEFAUD .. T	Botanique.
A. THOMAS .. T	Biologie cellulaire.	Mlle LE BRETON T	Physiologie de la nutrition.
ARNULF T	Optique appliquée.	SALEM T	Mathématiques générales.
M. MORAND.. T	Enseignement de physique.	LELONG T	Application de l'analyse à la géométrie.
SOLEILLET .. T	Physique (P.C.B.).	DEVILLERS .. T	Anatomie et histologie comparées.
FORTIER T	Mécanique expérimentale des fluides.	EIHRESMANN .. T	Topologie algébrique.
DANJON T	Astronomie.	FRANÇON T	Physique (S.P.C.N.).
PETIT T	Biologie maritime.	GLANGEAUD .. T	Géographie physique et géologie-dynamique.
QUENEY T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	GODEMENT .. T	Mathématiques (M.P.C.).
GALLIEN T	Embryologie.	PISOT T	Techn. math. de la physique
EICHHORN .. T	Botanique.	ROCH (E.) .. T	Géologie.
DE CUGNAC .. T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	SCHATZMANN.. T	Astrophysique.
Mlle CAUCHOIS T	Chimie physique.	TERMIER T	Paléontologie stratigraphique.
THELLIER .. T	Physique du globe.	ZAMANSKY .. T	Mathématiques générales.
L'HÉRITIER .. T	Biologie générale (Orsay).	LENNUIER .. T	Physique (P.C.B.).
GRIVET T	Radioélectricité (Orsay).	RIZET T	Génétique (Orsay).
PONCIN T	Mécanique générale.	ROUTHIER .. T	Géologie appliquée.
DUBREIL T	Arithmétique et théorie des nombres.	M ^{me} TONNELAT T	Physique théorique.
QUELET T	Chimie organique.	DIXMIER T	Mathématiques (M.P.C.).
CAGNIARD T	Géophysique appliquée.	SOUCHAY T	Chimie générale
CHAMPETIER.. T	Chimie macromoléculaire.	AIGRAIN T	Electrotechnique générale.
CUVILLIER .. T	Micropaléontologie.	BRUSSET T	Chimie systématique.
JUNG T	Pétrographie.	M. LEVY T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
TRILLAT T	Microscopie et diffraction électronique.	M ^{me} CHAIX .. T	Chimie biologique.
WIEMANN T	Chimie organique et structurale.	M ^{me} HUREL-PY	Biologie végétale (P.C.B.).
JACQUINOT .. T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).		

MM. PIAUX	T	Chimie (M.P.C.).	MM. LEMÉE	T	Physiol. végétale (B.M.P.V.) (Orsay).
BRUN	T	Mécanique théorique des fluides.	GUÉRIN	T	Chimie (M.P.C.) (Orsay).
LEDERER	T	Chimie biologique.	CHATELET M.	T	Chimie (P.C.B.).
M ^{me} DUBREIL.	T	Mathématiques (agrégation).	JEAN	T	Physique nucléaire (Orsay).
M ^{me} LELONG .	T	Mathématiques (E.N.S.).	MATTLER	T	Physique (P.C.B.).
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).	MICHEL (Louis)		Physique théor. des Hautes énergies (Orsay).
COTTE	T	Physique électricité.	BERGERARD ..	T	Zoologie (Orsay).
DUBOIS J. E.	T	Chimie organique	BERTEIN	T	Electronique (Orsay).
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.).	BOUSSIÈRES		Chimie de radioéléments (Orsay).
MICHEL A. ..	T	Chimie minérale (Orsay).	Mme COUTURE	T	Thermodynamique et mécanique physique.
OLMER	T	Energétique générale.	ELLENBERGER	T	Géologie appliq. sur le terr.
ROUAULT	T	Electricité (Orsay).	FRANC		Biologie animale (P.C.B.).
GAUTHIER ..	T	Mécanique appliquée.	SCHNELL ..		Botanique tropicale (Orsay).
BARCHIEWITZ	T	Chimie physique.	STOLKOWSKI		Physiologie générale.
BROSSEL	T	Physique atomique.	ACHER		Chimie biologique (Orsay).
BUSER	T	Physiologie comparée.	BAUDOIN		Biologie animale (P.C.B.).
CAMUS	T	Physiologie vég. (B.M.P.V.).	BEAUMONT ..		Biologie animale (S.P.C.N.).
CASTAING ..	T	Physique (Orsay)	BLAMONT	T	Géophysique ionosphère.
CURIEN	T	Minéralogie et cristallographie.	BOURREAU ..		Botanique
MOYSE	T	Physiologie végétale (Orsay).	CURIE D. ..		Physique (M.G.P.).
NOIROT	T	Evolution des êtres organisés	DURANT-DELGA		Géologie
PANNETIER ..	T	Chimie générale (Orsay).	FRÉON	T	Chimie organique (Orsay).
POSSOMPES ..	T	Zoologie.	HELLER	T	Physiologie végétale.
PULLMANN ..	T	Chimie théorique.	TORTRAT	T	Calcul des probabilités.
TEILLAC	T	Physique nucléaire et radio-activité.	CAILLEUX ..		Géologie (S.P.C.N.).
TONNELAT ..	T	Biologie physico-chimique.	MAGNAN	T	Physique (S.P.C.N.).
VILLE	T	Econométrie.	DAUDEL	T	Mécanique ond. appliquée à la chimie théorique et à la physique nucléaire.
WILLEMART ..	T	Chimie (P.C.B.).	Mlle FOURCROY		Biologie végétale (S.P.C.N.).
DODÉ	T	Chimie (Orsay)	Mme CHOQUET-		
FREYMANN ..	T	Recherches physiques.	BRUHAT ..	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.
GUINOCHET ..	T	Biol. vég. (S.P.C.N.) (Orsay).	Mlle VEIL ..		Physiologie générale.
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.).	LWOFF	T	Microbiologie.
Mlle JOSIEN..	T	Chimie (S.P.C.N.).	SIESTRUNCK..	T	Mécan. phys. et expérimentale.
CHEVALLEY ..	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.	LACOMBE	T	Métallurgie des mét. nucl.
ARNOULT	T	Electronique (Orsay).	BROCHARD ..	T	Physique (P.C.B.) (Orsay).
CHAPELLE ..	T	Physique (Orsay).	CABANNES ..	T	Mécanique générale.
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay).	LESIEUR	T	Mathémat. (M.P.C.) (Orsay).
DENY	T	Mathématiques gén. (Orsay)	MAZET	T	Mécanique générale (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.	CAIRE		Géographie phys. et géol. dynamique.
LUCAS G. ..	T	Géologie.	COMOLET	T	Mécanique des fluides.
ALLARD	T	Chimie physique.	CORABŒUF ..		Physiologie animale.
BERTHELOT ..	T	Physique fondamentale des Hautes Energies (Orsay).	DELLOUE		Physique de l'exosphère.
BRICARD	T	Météorologie et physique de l'atmosphère.	GORENFLOT ..		Botanique II (Orsay).
Mme ALBE-FESSARD	T	Psycho-physiologie.	HOUILLOIN ..	T	Biologie animale P.C.B.
FRIEDEL	T	Physique des solides (Orsay).	JULLIEN J. ..		Chimie P.C.B.
M. JULIA		Etude des molécules naturelles complexes.	MALGRANGE ..	T	Tech. math. de la phys.
LENDER	T	Biologie animale (S.P.C.N.), Orsay.	OLIVIER		Antropologie.
MAGAT		Physico-chim. des radio-éléments.	NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie.	BLANC-LAPIERRE		Physique E.N.S. (Orsay).
MONOD	T	Chimie du métabolisme.	CHEVAUGEON..	T	Botanique (Orsay).
BENOIT	T	Physiologie animale (Orsay).	KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
DE POSSEL ..	T	Analyse numérique.	SAMUEL	T	Mathématiques E.N.S. féminines.
CHARLOT	T	Chimie analytique.	KOURGANOFF..	T	Astronomie (Orsay).
HAISSINSKY ..	T	Radiochimie.	THIRY	T	Mécanique céleste.

SOMMAIRE

Avant-propos.

Résumé.

Liste des symboles utilisés.

CHAPITRE PREMIER

Remarques préliminaires et définitions.

CHAPITRE DEUXIEME

Notions sur le mécanisme de fluage et les modifications de structure qui l'accompagnent. Motifs de la présente étude.

CHAPITRE TROISIEME

Méthodes expérimentales.

I. Appareils.

- A) Essais de fluage.
- C) Essais de relaxation.
- C) Cycles couple-torsion; hystérésigraphes.
 - 1° Hystérésigraphe de Chevenard, pour fils.
 - 2° Machine de torsions alternées, système Chevenard.
 - 3° Hystérésigraphe de Boulanger.
 - 4° Mesure de l'amortissement.

II. Matériaux étudiés.

III. Mise en œuvre des résultats.

- A) Courbes de fluage.
- B) Cycles couple-torsion.

CHAPITRE QUATRIEME

Modèles rhéologiques classiques.

- 1° Essai de fluage sous contrainte constante.
- 2° Hystérésigraphe type Chevenard.
- 3° Hystérésigraphe type Boulanger.

CHAPITE CINQUIEME

Résultats expérimentaux.

I. Essais de fluage sous charge constante.

- A) Aluminiums.
 - 1° Eprouvettes monocristallines.
 - 2° Eprouvettes polycristallines.
 - 3° Recouvrance.
 - 4° Observations diverses.
 - Energie d'activation.
 - Effet d'une surcharge.
 - Influence de la grosseur du grain; « équilibre cohésion ».
 - Forme exacte du début des courbes de fluage.
 - 5° Remarques générales sur le fluage de l'aluminium.

B) Zinc.

C) Magnésium.

D) Cuivre.

E) Nickel.

F) Acier austénitique nical D (Cr-Ni 25-20).
Recouvrance.

G) Fer Armeo.
Recouvrance.

H) Acier sorbitique (45 NCD 17), coulée I.

1° Forme du début de fluage.

2° Influence de la charge sur la vitesse initiale.

3° Cas d'une charge forte à température peu élevée.

4° Mise en charge progressive.

5° Recouvrance. Décharge partielle.

J) Verre pyrex.

K) Rhodoïd.

II. Essais de torsion cyclique.

A) Aluminium.

1° Métal recuit.

2° Métal éroui.

B) Zinc.

Vitesse maximale de fluage, V_0 .

Couple maximal C_0 .

Aire du cycle couple-torsion.

C) Nickel.

1° Métal recuit.

2° Métal éroui.

D) Fer armeo.

E) Acier sorbitique (45 NCD 17), coulée II.
Courbe d'accommodation.

F) Acier au Si et nical D.

G) Verres.

H) Rhodoïd.

III. Essais de relaxation.

IV. Résumé des principaux résultats expérimentaux.

A) Fluage sous charge constante.

B) Cycles couple-torsion.

CHAPITRE SIXIEME

Discussion des résultats.

I. Confrontation avec les lois du modèle de Boltzman simple.

A) Fluage sous charge constante.

B) Relaxation à longueur constante.

C) Cycles couple-torsion.

- II. Essai d'explication par groupement en série de modèles de Boltzmann indépendants.
 - A) Cas du fluage sous charge constante.
 - 1° Cas linéaire.
 - 2° Théorie mixte.
 - 3° Cas non linéaire.
 - B) Cas des essais de relaxation.
 - C) Cas des cycles couple-torsion.
 - 1° Cas des cycles elliptiques (modèles à viscosité linéaire).
 - 2° Modèles à viscosité non linéaire.
 - III. Principe de superposition de Boltzmann.
 - IV. Introduction d'un nouveau mode de groupement de modèles visco-élastiques : modèles à interaction.
 - A) Description du modèle et mise en équation.
 - B) Modèle analogique électrique.
 - 1° Modèle simple.
 - 2° Modèle en éventail.
 - 3° Modèle à résistances non linéaires.
 - 4° Sollicitations cycliques.
 - 5° Relaxation.
 - V. Examen des résultats obtenus avec les modèles à interaction. Interprétation physique.
 - 1° Remplacement du modèle simple par un modèle « en éventail ».
 - 2° Modèle à éléments linéaires, mais où la première résistance R_1 est inférieure aux autres, de valeur R .
 - 3° Modèle à résistances non linéaires.
- Acier sorbitique.

CHAPITRE SEPTIEME

Conclusion générale.

ANNEXE I

Applications du modèle de Boltzmann à l'hystérésis-graphe de Chevenard.

ANNEXE II

Applications du modèle de Boltzmann à l'hystérésis-graphe de Boulanger.

I. Cas des oscillations forcées.

A) Cas particulier : liquide de Maxwell.

B) Cas général.

1° Variation des $\operatorname{tg} \psi$ avec τ_a , à ω constant.

2° Variation de $\operatorname{tg} \psi$ en fonction de ω , à τ_a constant.

3° Représentation simultanée des variations de $\operatorname{tg} \psi$ en fonction de τ_a et ω .

II. Cas des oscillations libres.

a) Solide de Kelvin-Voigt.

b) Liquide de Maxwell.

c) Relaxation faible.

ANNEXE III

Cas d'un déphasage constant entre vitesse de fluage et couple.

BIBLIOGRAPHIE.

AVANT-PROPOS

Les travaux exposés dans le présent mémoire représentent vingt années de recherches; ils ont été exécutés dans des laboratoires variés et sont demeurés non publiés pour la plupart. Je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé ou encouragé dans ces études.

C'est d'abord aux Aciéries de Saint-Chamond que j'ai eu l'occasion de m'intéresser pour la première fois au phénomène du fluage des métaux, grâce à leur directeur, M. Joseph Roederer, et à M. Jean-Marie Vialle, qui y dirigeait alors les laboratoires.

Mais c'est surtout à la mémoire de mon maître Pierre Chevenard que vont mes sentiments de gratitude. C'est lui qui m'a vraiment initié à la recherche, au cours de l'année que j'ai passée dans son laboratoire à Imphy et, par la suite, par les conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer. A côté de Pierre Chevenard, je voudrais aussi remercier tous ceux qui m'ont si gentiment accueilli et aidé à Imphy, en particulier ses collaborateurs, M. Xavier Waché et M. Pierre Joumier.

A Ugine, ensuite, où j'ai pu pendant quelques temps poursuivre des études sur le fluage au laboratoire des acéries grâce à l'appui bienveillant et amical de M. René Perrin, je tiens à exprimer ma reconnaissance à M. Henri Jolivet, alors directeur du Laboratoire, et à son collaborateur, M. Jean de Lacombe, qui m'a beaucoup appris sur le fluage.

La plus grande partie de ces travaux a été exécutée au Centre de Recherches Métallur-

giques de l'Ecole des Mines; qu'il me soit permis de remercier ici ceux qui, par leur soutien, m'ont permis de créer et développer ce Centre, et notamment la Direction de l'Ecole des Mines; et, surtout, je ne voudrais pas oublier de mentionner ici ceux de mes collaborateurs d'alors qui m'ont le plus aidé dans ces études sur le fluage, M. Gérard Wyon, ainsi que Francis Aubertin, trop tôt disparu.

A l'IRSID, enfin, c'est grâce aux encouragements de la Direction Générale que j'ai pu achever ces travaux. Je tiens à remercier les ingénieurs de cet Institut qui en ont pris leur part : M. Christian Boulanger, à l'aide d'un hystérésigraphe de sa conception, a enregistré des cycles couple-torsion sur des aciers à très haute température; M. Ramchandra Tamhankar a exécuté de nombreux essais à l'aide d'un hystérésigraphe Chevenard prêté par le service de Recherches des Aciéries d'Imphy; M. Guy Murry a exécuté divers essais de relaxation; enfin M. Tibor Pech, stagiaire hongrois, a mis en œuvre le modèle analogique électrique que nous avons imaginé.

Enfin, je tiens à remercier les membres du jury, le professeur Georges Chaudron qui a toujours suivi mes travaux avec une grande bienveillance, le professeur Robert Mazet, qui a accepté la tâche de rapporteur, et de conseiller, et enfin le professeur Jacques Friedel, à qui je dois tant pour tout ce que j'ai appris au cours de longues discussions avec lui sur la physique des métaux.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550201_0034

Etude rhéologique du fluage et de l'hystérésis mécanique des matériaux

par C. CRUSSARD

RESUME

L'écoulement progressif des matériaux sous charge constante, à température suffisamment élevée, constitue le fluage. Après une période transitoire, la vitesse de fluage atteint en général une valeur stationnaire, régie par une énergie d'activation qui correspond à un mécanisme atomique en général bien connu à l'heure actuelle. Mais la période transitoire qui précède pose encore une énigme au chercheur. Diverses tentatives ont été faites pour l'expliquer, soit par des modèles rhéologiques, soit (lorsqu'il s'agit de matériaux cristallisés, de métaux par exemple) en faisant appel à la THEORIE DES DISLOCATIONS; malheureusement ces théories manquent tantôt de généralité, tantôt de précision.

La présente étude est une contribution à l'explication de ce fluage transitoire, comprenant diverses étapes :

— Nombreux ESSAIS DE FLUAGE sous contrainte (ou charge) constante, sur des matériaux très variés, cristallisés ou amorphes : aluminium pur et impur, zinc, magnésium, cuivre, fer, acier austénitique, acier sorbitique, verre, rhodoïd. La forme des courbes de fluage

transitoire a été analysée avec précision à l'aide d'une méthode différentielle (ce qui est très important).

— Mesures de la RECOUVRANCE (raccourcissement spontané après décharge à la fin d'un essai de fluage).

— ESSAIS DE TORSION CYCLIQUE sur les mêmes matériaux, avec enregistrement des cycles couple-torsion, permettant d'étudier l'hystérésis mécanique. Au cours de l'analyse de ces cycles, on étudie plus particulièrement le *frottement interne* (ou le déphasage entre couple et torsion, ce qui revient au même) et sa variation en fonction de la fréquence; on étudie aussi la variation au cours du cycle de la vitesse instantanée de fluage, et les paramètres qui la caractérisent.

— Exécution de quelques ESSAIS DE RELAXATION (variation de contraintes à longueur constante) sur certains des matériaux utilisés dans les autres essais.

— Essais d'interprétation à l'aide de MODELES RHEOLOGIQUES classiques, notam-

ment le modèle dit de « Boltzmann », dont l'application aux divers types d'hystérési-graphes utilisés est analysée. On montre l'insuffisance de ces modèles.

— Recherche d'un nouveau type de modèles et introduction des « modèles à interaction ». Les cas simples sont résolubles à l'aide du calcul symbolique; les cas complexes à l'aide de MODELES ANALOGIQUES ELECTRIQUES, dont la mise en œuvre est décrite.

Résultats expérimentaux

On trouve que le fluage transitoire est de forme parabolique, c'est-à-dire que la loi empirique reliant l'allongement ε au temps t est de la forme :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a t^m \quad [1]$$

(ε_0 , a et m constantes; $m < 1$).

Cette loi s'applique très bien aux corps amorphes, aux alliages contenant des précipités (acier sorbitique, aluminums impurs), aux métaux hexagonaux où les joints constituent des obstacles aux glissements (zinc, magnésium). Tous ces matériaux manifestent une tendance à la recouvrance, parfois très forte (rhodoïd, verre, acier sorbitique); le début des courbes de recouvrance est souvent parabolique, avec un exposant m égal à celui du fluage.

Pour les métaux ductiles, Al pur par exemple, la loi parabolique [1] est encore bien observée dans les monocristaux, et dans les éprouvettes polycristallines lorsque la charge est forte et l'allongement initial ε_0 suffisant pour fragmenter la structure en sous-grains dès le début du fluage. Dans les autres cas, la courbe de fluage transitoire a une forme moins régulière. Pour ces métaux la tendance à la recouvrance est faible ou très faible.

Les valeurs de l'exposant m sont assez variées, allant de 0,15 (cuivre à l'ambiante) à 0,85 (zinc à 170° ou magnésium à 275°). Dans l'ensemble, m croît avec la température; mais, pour des températures pas trop élevées, des valeurs m allant de 0,3 à 0,45 sont assez courantes. Pour le verre recuit, m est voisin de 0,5.

Quant aux cycles couple-torsion, leur forme varie avec les matériaux.

Pour les verres, l'acier sorbitique, le zinc et divers métaux écrouis (Al, Ni), aux températures où la viscosité est appréciable, les cycles sont elliptiques ou presque, et se réduisent sensiblement à une droite double aux grandes fréquences : on peut dire que le comportement est VISCO-ELASTIQUE. Si l'on calcule la vitesse de fluage, on constate que le déphasage ψ' entre celle-ci et le couple est très sensiblement INDEPENDANT DE LA FREQUENCE ou de la pulsation ω ; la vitesse de fluage maximale, V_0 , varie comme ω^r ($r \leq 1$). Le calcul montre, et l'expérience vérifie très généralement, que, dans ce cas, le frottement interne mesuré par $\lg \psi$ (ψ : déphasage entre couple et torsion) varie comme ω^{1-r} .

Pour les métaux ductiles comme Al, à température pas très élevée la déformation tend à créer un écrouissage irréversible, c'est-à-dire sans recouvrance, comme nous l'avons dit plus haut. Les cycles couple-torsion cessent d'être elliptiques, et tendent à présenter des sommets pointus, dont la forme varie peu avec la fréquence. Il en résulte que r tend vers 1 et que ψ' (pour autant qu'on puisse le définir, car les variations ne sont plus sinusoïdales) est plutôt faible.

En rapprochant les résultats des essais de torsion cycliques des essais de fluage, on observe une corrélation pas très serrée entre r et m ($r + m \neq 1$).

Interprétation

On montre aisément qu'aucun modèle rhéologique simple (par exemple modèle de Boltzmann) ne saurait expliquer les lois expérimentales trouvées.

On peut aller beaucoup plus loin dans l'explication de ces lois en ayant recours à un grand nombre de modèles agissant en série (ou en parallèle), différents les uns des autres et caractérisés chacun par un paramètre, réparti selon une certaine fonction de répartition. En choisissant convenablement le paramètre et sa fonction de répartition, on retrouve la plupart des lois expérimentales.

Mais cette explication est très arbitraire : elle suppose les centres de déformation (correspondant aux modèles rhéologiques individuels) indépendants les uns des autres, et surtout on remarque que l'exposant m , qui caractérise le comportement rhéologique des matériaux dans le fluage transitoire, est lié essentiellement à la forme de la fonction de répartition; or m a des valeurs identiques dans des matériaux très différents; il serait assez extraordinaire que ces matériaux aient même fonction de répartition.

Il semble préférable de faire appel à des modèles identiques (ou à deux ou trois types

de modèles) qui ne seraient pas indépendants, mais interagissant les uns sur les autres. Avec un MODELE A INTERACTIONS très simple, contenant des éléments linéaires identiques, le calcul montre que le fluage transitoire suit une loi en $t^{0.5}$. On peut modifier ce modèle en introduisant des éléments différents ou non linéaires; les calculs deviennent alors trop compliqués; on les résoud grâce à une analogie électrique et on retrouve bien les lois expérimentales.

On examine enfin la relation entre ces modèles à interaction et la théorie des dislocations.

LISTE DES SYMBOLES UTILISES

t	temps	ψ	déphasage entre couple et torsion
ε	allongement	ψ'	déphasage entre vitesse de fluage et couple
α	angle de torsion	G	module de Coulomb
σ	contrainte de traction	E	module d'Young
C	couple de torsion	μ	(Chapitre IV) coefficient de viscosité
V, v	vitesse de fluage		(Chapitres V et VI) exposant de la loi d'accommodation des cycles
m	exposant de la loi (parabolique) de fluage transitoire	k_1	coefficient élastique non relaxé
a	coefficient devant le terme en t^m	k_R	coefficient élastique relaxé
n	exposant de la loi complète de fluage, terme réaccélééré	χ	rapport $\frac{k_R}{k_1}$
b	coefficient devant le terme en t^n	τ_e	temps de relaxation à déformation constante
β	coefficient de la contrainte dans l'expression de l'énergie d'activation [62]	τ_a	temps de relaxation à déformation constante (déformation angulaire)
p	exposant de la loi de répartition de β (β^p)	τ_σ	temps de relaxation à tension constante
q	exposant de la variation du coefficient a avec la charge ($a \simeq \sigma^q$)	τ_C	temps de relaxation à couple constant
r	exposant de la loi de variation de la vitesse de fluage en fonction fréquence (déformation cyclique, tableau XXII)	δ	frottement interne
s	exposant de la loi de variation de V_0 avec σ [66]	I	moment d'inertie (hystérésigraphe Bou-langer)
W	énergie emmagasinée (cycles)	λ	variable réduite = $\tau_a^2 \frac{k_1}{1}$
θ	période	ξ	variable réduite = $\omega^2 \frac{1}{k_1}$
ω	pulsation ($\omega = \frac{2\pi}{\theta}$)		

CHAPITRE PREMIER

REMARQUES PRELIMINAIRES ET DEFINITIONS

Le mot *fluage* caractérise la propriété de divers matériaux, de se déformer progressivement au cours du temps sous l'effet de contraintes mécaniques. Ce mot s'applique à des corps placés dans des conditions telles qu'ils ne sont ni tout à fait solides, ni tout à fait liquides. Mais des conditions définissant ce domaine limitrophe, il ne saurait exister une définition précise. En effet, comment définir, par exemple, un corps « tout à fait » solide ?

Du point de vue macroscopique, on donne en général la définition suivante : soumettons un corps à un effort ou sollicitation quelconque ; il se déforme. Si, en supprimant la sollicitation, le corps reprend exactement sa forme primitive, on dit qu'on est resté dans le *domaine élastique*. S'il ne reprend pas sa forme primitive, il a subi une *déformation permanente* ou *plastique* et on a dépassé la *limite d'élasticité*.

Mais on se heurte ici à quelques difficultés : d'abord l'emploi du mot *exactement*, qui masque une défaite ; c'est que la définition du domaine élastique dépend de la sensibilité de l'appareil de mesure. Ensuite, il se peut fort bien qu'une déformation subsistant après suppression de la sollicitation, finisse par disparaître progressivement : c'est le phénomène de *recouvrance*. Il faut donc préciser un peu notre définition ; le mieux, pour ce faire, est de se rapporter à la forme des diagrammes effort-déformation. Sous ce rapport, nous adopterons les définitions symbolisées par les figures 1 (a à f) et leur légende.

On a essayé pendant longtemps de distinguer les déformations (plastiques) *instantanées* et les déformations progressives dans le temps, dites *visqueuses*. Mais le temps est une variable inséparable de toute expérimentation ; il intervient dans toute déformation plastique, qui ne saurait donc en toute rigueur être scindée en une partie instantanée et une partie visqueuse. D'ailleurs des expériences récentes¹ ont montré, sur de nombreux métaux, que l'apparition de la déformation plastique ne suit pas immédiatement l'application d'une charge, mais exige un certain *temps d'incubation*, parfois

extrêmement court et difficile à mesurer il est vrai.

Si, en toute rigueur, toute déformation plastique dépend du temps, il n'en reste pas moins que certains matériaux, métaux ou autres, peuvent se déformer dans des conditions où le temps joue un rôle réduit, la déformation atteignant presque instantanément un état d'équilibre fonction de la contrainte (*déformation « plastique pure »*) ; dans d'autres conditions, ou pour d'autres matériaux, le temps joue un rôle prépondérant dans la déformation, qui peut se prolonger très longtemps, voire indéfiniment, sous contrainte constante. C'est à ce dernier type de déformation qu'on a

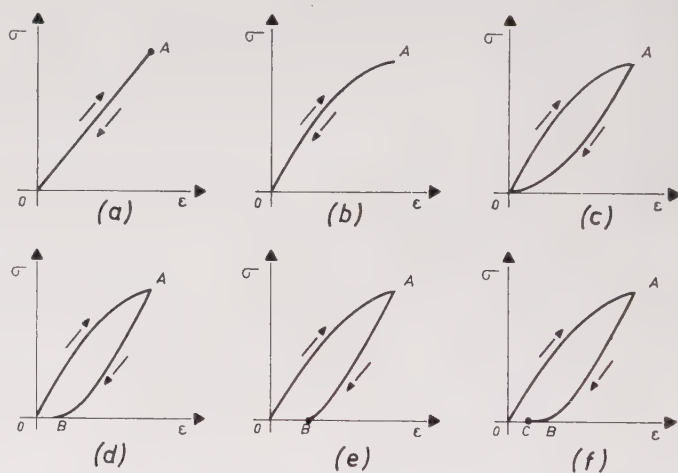


FIG. 1

Diagramme effort (σ) - déformation (ϵ), à la charge et à la décharge :

- a) Déformation élastique proportionnelle.
- b) Déformation élastique pure.
- c) Déformation élastique à hystérèse, ou anélastique.
- d) Déformation anélastique à recouvrance (BO).
- e) Déformation plastique pure.
- f) Déformation plastique à recouvrance (BC).

réserve le nom de *fluage* : on dit aussi que la déformation est « visqueuse ». La *recouvrance* est un fluage en retour, après décharge (fig. 1 d et f). On a l'habitude d'appeler *relaxation* le phénomène symétrique : décroissance de la contrainte lorsqu'on maintient constante la longueur d'une éprouvette après l'avoir mise en charge.

Par abréviation, la déformation plastique pure est appelée simplement « plastique » quand on l'oppose au comportement visqueux.

Cette définition du fluage est contingente et dépend en particulier de l'échelle des temps. Telle roche, granite ou calcaire, qui, à l'échelle des essais de laboratoire, paraît parfaitement solide et incapable de fluer, subit au contraire des fluages importants à l'échelle des temps géologiques.

On peut définir un corps solide soit comme un corps capable seulement de déformation élastique, soit, par extension, capable de déformation élastique ou plastique « instantanées », c'est-à-dire ne fluant pas. Là encore, la définition se heurte au même genre de difficulté, car on ne dispose pas d'un délai assez long pour assurer qu'un corps mis sous contrainte ne « fluera » jamais.

Devant la complexité de ces définitions, nous essayerons de clarifier la situation en faisant appel à des considérations d'un tout autre ordre : partant de la structure des solides à l'échelle atomique, nous pourrions dire qu'un atome donné est entouré d'un certain nombre de voisins occupant des sites bien définis; dans le cas des corps cristallisés, ces sites correspondent aux nœuds du réseau. Soumettons le solide à une sollicitation mécanique : les distances interatomiques varient, certaines liaisons — entre paires d'atomes voisins — sont allongées, d'autres raccourcies. Tant qu'aucune liaison n'est « rompue », lorsque la sollicitation est supprimée le cristal revient à son état primitif et la déformation est *élastique*. Sitôt qu'une liaison est rompue, c'est-à-dire qu'un atome a changé de voisins, la *plasticité* est apparue.

Si ces ruptures de liaison sont localisées et peu nombreuses, le solide ne se déforme pas sensiblement. C'est le cas dans le phénomène de diffusion : on hésite à donner à ce processus le nom de déformation plastique, d'autant plus que la diffusion, au moins dans les solides de substitution, consiste en un échange entre deux atomes, de même espèce, ou d'espèces très voisines; dans ce cas, autour d'un atome donné la configuration des sites occupés, sinon celle des atomes individuels, ne change pas. Et pourtant, un processus de diffusion, orienté par une contrainte, peut fort bien produire un fluage², parfois important, mais à très haute température.

Dans le cas de corps amorphes, ces ruptures de liaison restent très localisées. Sous l'action

de l'agitation thermique, des atomes individuels ou des groupes d'atomes provoquent dans leur entourage des remaniements de structure, dont l'effet ne s'étend pas loin. A basse température ces déplacements sont rares, le corps ne subit que des déformations (quasi) élastiques; à haute température, ces déplacements deviennent fréquents, d'où une certaine viscosité. Ainsi les verres ont un comportement (quasi) élastique à l'ambiante, et *visco-élastique* à haute température, où ils deviennent capables de fluages importants.

Pour les corps cristallisés, la situation est différente. Leur structure particulière fait qu'une rupture de liaison ne se produit pas isolément, mais se répercute en cascade le long de *surfaces de glissement*, en général des plans réticulaires denses. La théorie de ce phénomène s'est développée depuis un quart de siècle et a reçu le nom de *théorie des dislocations*, car la propagation de ces ruptures de liaison se produit par déplacement d'un front de perturbation qui, dans le plan (ou la surface) de glissement, sépare la zone ayant glissé de celle qui n'a pas subi de glissement; la configuration des atomes sur ce front linéaire s'appelle une *dislocation*. Nous ne reviendrons pas sur la description des dislocations et de leurs propriétés, qui font l'objet de traités, aujourd'hui classiques³.

Les corps cristallisés ne sont pas tous capables de ce genre de déformation; on peut dire qu'ils ne possèdent pas tous de dislocations mobiles. Mais ceux qui en possèdent sont *plastiques*; c'est le cas des métaux en général. Les dislocations qui entrent en jeu dans ce cas doivent être considérées comme des défauts de structure congénitaux. Elles sont capables de se multiplier par des processus spéciaux (sources de Frank-Read, double déviation, cf. ³).

Pour mettre en évidence le lien entre ces considérations d'ordre structural, atomique, et les définitions macroscopiques données plus haut, nous allons passer en revue divers cas.

1° Les dislocations sont en général ancrées sur place par diverses forces, soit inhérentes à la structure réticulaire (forces de Peierls-Nabarro⁴), soit dues aux impuretés ou éléments d'alliage, dans le cas des métaux (effet Cottrell⁵ et Suzuki⁶). Tant que la contrainte est insuffisante pour surmonter ces forces d'ancrage, la déformation reste *élastique pure* (fig. 1 b).

2° Si la contrainte est suffisante, les dislocations peuvent être arrachées de leurs positions de repos, avec ou sans l'aide d'un appoint

d'énergie dû à l'agitation thermique. Le premier cas (activation thermique) est le plus fréquent, et explique le temps d'incubation mentionné plus haut. Deux cas sont alors à distinguer :

a) La contrainte n'est pas suffisante pour que les dislocations puissent aller très loin, soit qu'elles soient retenues par leur tension de ligne (c'est le cas, par exemple, à haute température où les forces d'ancrage sont faibles ou nulles, où une contrainte faible est donc capable de mettre en mouvement les dislocations, mais pas de les entraîner très loin; le mécanisme de multiplication de Frank-Read n'a pas encore pu jouer dans ce cas); soit par des obstacles proches (précipités, joints de grains; dans ces cas, dit de « microdéformation », le mécanisme multiplicateur de Frank-Read peut jouer, mais peu). Après suppression de la contrainte, les liaisons interatomiques initiales tendent à se rétablir, et les dislocations à reprendre leur place initiale; la déformation est encore *élastique*. Mais l'ordre dans lequel ces liaisons se rétablissent n'est pas forcément le même que celui dans lequel elles se sont rompues; on observe alors un décalage ou *hystérèse*; on est dans le cas de la figure 1 c (déformation élastique à hystérèse; certains auteurs⁷ ont créé pour ce comportement le terme *anélastique* *).

— Si la forme du cycle effort-déformation (fig. 1 c) est indépendante du facteur temps (c'est-à-dire de la vitesse de déformation ou d'application de la charge), on dit que l'hystérèse est du type « à frottement solide ».

— Si elle dépend du temps, ou de la vitesse, on a affaire à une hystérèse du type « visqueux ». On parle souvent dans ce cas de comportement visco-élastique ou de *microfluage*, la portion « visqueuse » de la déformation étant du même ordre de grandeur que la portion « élastique ». Par comparaison avec le cas des corps amorphes, où les glissements élémentaires sont très petits, nombreux et répartis dans toute la masse, les glissements des cristaux plastiques sont coordonnés et

groupés de telle façon qu'on peut les décrire par des déplacements de dislocations.

— Parfois, dans le cas de dislocations arrêtées sur des obstacles (joints par exemple), après qu'un mécanisme multiplicateur (de Frank-Read) a joué un peu, on observe à la décharge une réversibilité partielle assez rapide, suivie d'une recouvrance plus lente (fig. 1 d). C'est un cas limite, plus complexe, que l'on pourrait prendre pour une déformation plastique si l'on n'attendait pas assez longtemps.

b) Si la contrainte est suffisante pour que les dislocations puissent aller loin, divers mécanismes de blocages peuvent jouer^{3, 61} et les empêcher de revenir en arrière. On est alors dans le domaine de la *déformation plastique* (fig. 1 e, f). La forme des courbes effort-déformation dépend plus ou moins du facteur temps (ou vitesses de déformation). A haute température, elle en dépend beaucoup; on aura en général des courbes du type 1 f; dans ce cas, on est dans le domaine du fluage; sous charge constante, le matériau continuera à se déformer indéfiniment.

A l'échelle des dislocations, ces manifestations correspondent aux phénomènes suivants : dans la déformation plastique à basse température, peu dépendante du temps, les dislocations sont bloquées sur des obstacles (précipités, autres dislocations plus ou moins empilées ou combinées en « écheveaux » et en « dislocations sessiles », incapables de glisser³). Il est important d'introduire ici la *tendance à la recouvrance* : certains obstacles bloquent les dislocations dans les deux sens, comme les jonctions⁶¹; une déformation qui n'introduit que ce genre d'écrouissage est irréversible (déformation plastique pure). D'autres obstacles créent autour d'eux d'importantes zones de contraintes internes où s'empilent des dislocations; quand on relâche la contrainte appliquée, les dislocations de ces empilements tendent à rétrograder; d'où une tendance à la recouvrance (fig. 1 f). Dans le fluage interviennent deux mécanismes spéciaux, la *double déviation* et la *montée* (ou diffusion) *des dislocations*, qui leur permettent de quitter leur plan de glissement et de contourner les obstacles. Le mécanisme de la montée est aujourd'hui bien compris³; il fait appel à l'*autodiffusion* du métal, par l'intermédiaire des lacunes *réticulaires*, qui réagissent avec les dislocations, de préférence aux endroits où leur ligne n'est pas régulière et présente des crans. C'est donc un processus activé thermiquement.

* L'anélasticité entraîne l'amortissement des vibrations libres d'une éprouvette; on dit souvent qu'il y a *frottement interne*. Il existe d'autres causes de frottement interne que les mouvements de dislocations, telles que l'effet thermoélastique, l'effet magnétique, la diffusion, les glissements intergranulaires.

D'autres corps, comme les matières plastiques, les caoutchoucs ont des comportements encore plus compliqués. La base de leur structure consiste en un réseau de chaînes organiques, plus ou moins contournées, avec des points faibles. La rupture de ces points faibles provoquent des déplacements relatifs d'éléments de ces chaînes, dont l'importance est intermédiaire entre les glissements locaux de corps amorphes et les glissements plastiques des métaux.

Le tableau I résume les types de déformation que nous avons passés en revue. Nous noterons qu'il est impossible de les classer sous un seul aspect : il faut faire intervenir à la fois la forme des courbes effort-déformation et l'influence de facteur temps (ou vitesse).

Il nous a paru plus rationnel de donner la prépondérance au premier facteur; mais, dans certains cas on peut évidemment faire l'inverse.

De cette revue rapide, nous retiendrons encore quelques idées : la difficulté de donner des définitions exactes qui recouvrent les termes sanctionnés par l'usage; l'existence de cas limitrophes qui montre que les différents types de déformation ne sont pas bien tranchés, mais qu'on a toujours affaire à des phénomènes qui interviennent de façon « plus ou moins intense » (par exemple la viscosité selon la température); enfin, l'idée que la distinction entre élasticité et plasticité est d'autant plus difficile que le corps s'éloigne de la structure cristallisée parfaite.

TABLEAU I

CORPS	TYPE DE DÉFORMATION			Mécanisme atomique
	Classification (selon réversibilité des courbes effort- déformation)	Influence du facteur temps	Dénominations usuelles	
Verres	1 a élastique proportionnelle	0	élastique	Petits glissements locaux indépendants Id + nombreux, + étendus et un peu interdépendants
	1 c-d élastique à hystérèse	forte	visco-élastique	
	1 f	forte	fluage	
Métaux	1 a élastique proportionnelle	0	élastique	Dislocations ancrées, immobiles
	1 c élastique à hystérèse	0	à frottement solide	Petits mouvements de dislocations
	1 d élastique à recouvrance	} sensible forte	visco-élastique	Id. (activation ther- mique)
	1 e plastique pure		microfluage	Id. (ou déplacement des lacunes)
	1 f	forte	plastique	Grands mouvements de dislocations, bloquées à la fin Id. + montée des dislocations
Caoutchouc	1 b élastique pure (non propor- tionnelle)	faible	élastique	
Matières plastique	1 d élastique à re- couvrance		plasticité retardée	Rupture d'éléments des chaînes atomiques
	1 f plastique à re- couvrance		fluage	

CHAPITRE DEUXIEME

NOTIONS SUR LE MECANISME DE FLUAGE ET LES MODIFICATIONS DE STRUCTURE QUI L'ACCOMPAGNENT. MOTIFS DE LA PRESENTE ETUDE

La revue que nous venons de passer des différents types de déformation, sous l'angle macroscopique (effort-déformation) et sous l'angle structural, atomique, nous a permis de placer dans son cadre le phénomène de *fluage*, ou comportement visqueux des matériaux. La connaissance du phénomène est fort ancienne; mais son étude systématique ne remonte guère, pour les métaux, qu'à un demi-siècle; c'est à Andrade⁸ que revient le mérite de l'avoir abordée.

La technique la plus couramment utilisée pour étudier le fluage consiste à mettre une éprouvette du matériau à étudier sous charge dans une enceinte isotherme, et à mesurer son allongement au cours du temps à l'aide d'un dispositif extensométrique approprié (soit par mesure point par point, soit plus souvent avec enregistrement automatique). C'est ce qu'on appelle couramment un *essai de fluage* et la courbe enregistrée (allongement-temps) une *courbe de fluage*. Pour des raisons de simplicité d'appareillage, ces essais sont en général conduits en traction sous *charge constante*; ce dispositif, qui correspond à beaucoup de cas pratiques, a cependant l'inconvénient, sur le plan théorique, que la contrainte augmente au fur et à mesure que l'éprouvette s'allonge. On a imaginé des dispositifs correcteurs pour maintenir constante cette contrainte.

Une courbe de fluage obtenue par un essai à température suffisamment élevée, a, en général l'aspect représenté sur la figure 2.

On y distingue plusieurs étapes :

- OA. Allongement instantané (élastique ou plastique).
- AB. Fluage ralenti, appelé *fluage transitoire* ou primaire.
- BC. *Fluage stationnaire*, à vitesse constante, appelé aussi fluage secondaire.
- DC. *Fluage accéléré*, ou tertiaire, conduisant à rupture.

La partie BC est plus ou moins courte, selon la température et la charge. Elle apparaît parfois comme une simple inflexion entre le fluage ralenti et le fluage accéléré.

Les modifications de structure accompagnant ces divers stades du fluage ont été étudiées depuis assez longtemps, sur des métaux purs en particulier. Ainsi, sur de l'aluminium raffiné, nous avons découvert, il y a plus de quinze ans, que le fluage produisait une fragmentation des grains⁹, observation confirmée peu après par d'autres auteurs¹⁰. Nous avons montré que ce phénomène pouvait s'interpréter comme une polygonisation sous charge¹¹, cette dernière ayant pour effet de faciliter la montée des dislocations qui provoque la polygonisation¹².

Cette polygonisation ne devient parfaitement nette que dans le domaine du fluage secondaire; aux rayons X, les taches correspondant à chaque sous-grain sont alors bien fines. Mais avant d'atteindre ce stade, dans le fluage transitoire il subsiste de l'astérisme, révélant des courbures de réseau ou des flexions plastiques^{13, 14}.

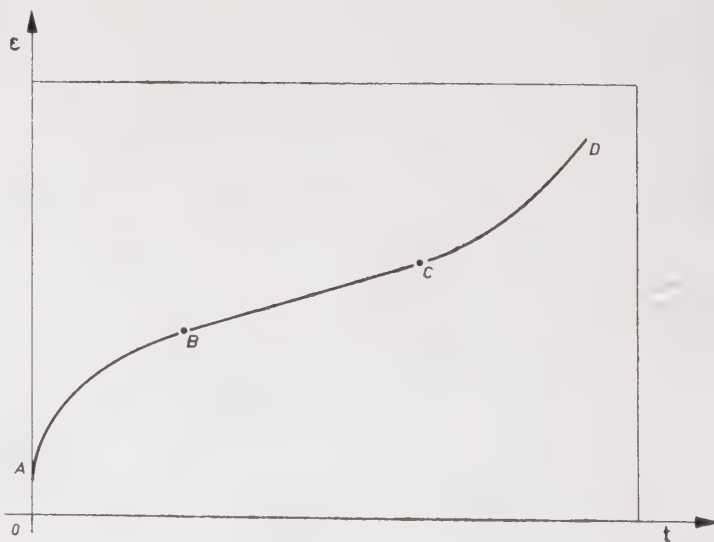


FIG. 2

Courbe de fluage (allongement - temps).

On a beaucoup étudié les dimensions de ces sous-grains. De même que Bragg avait suggéré une liaison quantitative entre le durcissement par écrouissage et la dimension des cristallites ou sous-grains produits par un écrouissage à froid, de même certains auteurs ont cherché à établir une relation entre la contrainte supportée par le métal au cours d'un fluage stationnaire et la dimension des sous-grains que présente le métal à ce moment. Bien qu'une relation de ce genre semble exister, indépendamment de la vitesse de déformation et de la température^{15, 16}, il y a des raisons de penser qu'il n'y a là qu'une coïncidence, plutôt qu'une liaison directe de cause à effet et que la disposition des dislocations à l'intérieur des sous-grains a une influence¹⁷, par exemple sous forme de jonctions⁶¹.

Toutes ces études, ainsi que les mesures d'énergie d'activation du fluage par la méthode de Dorn¹⁸, ont été faites en général au cours du fluage stationnaire. Si, comme il le semble¹⁷, la résistance au fluage est commandée par un facteur autre que l'espacement des sous-joints, il apparaît comme préférable de l'étudier dans des conditions où les sous-grains ne sont pas encore bien formés, c'est-à-dire dans le fluage transitoire.

C'est pourquoi, dans le présent mémoire, nous nous attacherons surtout à des études ayant trait à la composante transitoire du fluage.

Il faut également remarquer que les théories faisant intervenir la dimension des sous-grains ne peuvent s'appliquer au fluage de métaux durcis par de nombreux précipités (où la notion de sous-grain devient évanescence), et à plus forte raison à des verres ou des matières plastiques.

Or, ces matériaux très différents, métalliques ou non, présentent en ce qui concerne la forme des courbes de fluage beaucoup de similitudes, comme nous le montrerons par la suite. Il faut donc bien se garder d'expliquer une particularité de ces courbes par un facteur propre à un seul type de matériau; il faut s'astreindre à ne faire intervenir que des éléments de structure et des mécanismes communs à tous les matériaux présentant des propriétés analogues.

C'est pourquoi, dans nos recherches, nous nous sommes attachés à comparer, non seulement des métaux purs variés (Al, Zn, Mg, Ni, Cu, Fe) à l'état recristallisé ou écroui et

restaure, mais aussi des alliages (aciers austénitiques, aciers sorbitiques), ainsi que des verres (pyrex) et du rhodoïd.

Il faut bien dire que la référence à des travaux récents, par exemple^{15, 16, 17}, si elle a été introduite pour faciliter la présentation logique, ne suit pas l'ordre historique.

En réalité, les travaux sur le fluage que nous allons exposer remontent à plus de vingt ans. Ils ont débuté au laboratoire des Aciéries d'Imphy, sous la direction du professeur P. Chevenard et avec le concours de ses collaborateurs, MM. X. Wache et P. Joumier; ils se sont poursuivis au laboratoire des Aciéries d'Ugine, sous la direction de MM. H. Jolivet et J. de Lacombe; la plus grosse partie a été effectuée au Centre de Recherches Métallurgiques de l'Ecole des Mines de Paris, avec le concours de mes assistants, MM. F. Aubertin et G. Wyon; enfin, certains résultats plus récents ont été obtenus au département Physique de l'Irsid, grâce aux appareils nouveaux qu'y avait construit M. Ch. Boulanger, et grâce également à un hystérésigraphe Chevenard, prêté aimablement à l'Irsid par le Service de Recherches des Aciéries d'Imphy, et utilisé par M. R. Tamhankar. Enfin, le modèle analogique électrique que nous avons imaginé pour simuler le fluage, a été mis en œuvre par un stagiaire à l'Irsid, M. T. Pech.

Des résultats obtenus, certains ont été publiés. Mais beaucoup, restés dans des cartons, attendaient d'être classés, élaborés et interprétés: ils constituent la base de ce mémoire. Expliquons rapidement dans quel domaine ils se situent.

Nous avons indiqué plus haut les raisons logiques que l'on a d'étudier le fluage transitoire. Ces raisons n'existaient pas il y a une quinzaine d'années; mais cette étude paraissait attrayante, parce que, ainsi que l'avaient montré Andrade⁸, et plus tard Esser¹⁹ et de Lacombe²⁰, le fluage transitoire suit en général une loi parabolique du temps, soit en $t^{1/3}$ (Andrade), ou plus généralement en t^m , m étant en général compris entre 0,3 et 0,5. Il était donc intéressant de vérifier cette loi sur des matériaux variés, métaux purs, verres, etc.; d'où une première catégorie d'études sur l'analyse fine de la forme des courbes de fluage, et plus particulièrement de fluage transitoire, sur des courbes obtenues par essais de fluage sous charge constante.

Mais il existe une méthode particulièrement intéressante pour rester longtemps dans ce

domaine transitoire : c'est, après une petite déformation faisant intervenir le fluage, de déformer l'éprouvette en sens inverse pour la ramener, à peu près, dans son état initial, puis de recommencer la sollicitation initiale, de revenir en arrière, et ainsi de suite. Autrement dit, on est amené à étudier des *sollicitations cycliques*. La torsion cyclique à chaud est particulièrement intéressante; on la met en œuvre dans des appareils appelés *hystérésigraphes*, qui enregistrent les cycles couple-torsion d'une éprouvette à laquelle on impose, soit une torsion, soit un couple d'allure sinusoïdale.

C'est pourquoi, sur les mêmes matériaux ayant servi aux essais de fluage, ou des matériaux identiques, nous avons étudié l'allure des cycles couple-torsion obtenus à diverses températures, sur des hystérésigraphes variés.

Enfin, dans quelques cas, nous avons étudié le fluage par la technique des essais de relaxation : on met rapidement sous charge une éprouvette et l'on maintient sa longueur

constante : le fluage de l'éprouvette est compensé par une décroissance de la contrainte que l'on enregistre en fonction du temps. Dans ces essais, le fluage reste faible, de l'ordre de grandeur de l'allongement élastique imposé initialement à l'éprouvette; de ce fait, au cours d'un tel essai, on reste probablement dans le domaine du fluage transitoire.

Etablir une relation entre des essais de fluage sous charge constante, des essais de torsion cyclique et des essais de relaxation, c'est en somme faire de la rhéologie.

C'est pourquoi, dans ce qui suit, après avoir exposé les méthodes expérimentales, et avant même de décrire les résultats obtenus et de les discuter, nous ferons un petit exposé sur les *modèles rhéologiques* classiques; ces modèles sont en effet des schémas commodes pour classer les idées et guider le raisonnement. Nous verrons par la suite que ces modèles ne sont pas adéquats, et nous en présenterons un nouveau, de notre invention, qui rend mieux compte des phénomènes observés ^{21, 22, 23}.

CHAPITRE TROISIEME

METHODES EXPERIMENTALES

I. — APPAREILS

A) Essais de fluage

Les essais de fluage effectués aux laboratoires des Aciéries d'Imphy ou du Centre de Recherches de l'Ecole des Mines ont utilisé la machine classique, de Chevenard et Joumier, dite « T. R. » (traction-relaxation). Cette machine ayant déjà été décrite plusieurs fois ²⁴, nous en rappellerons seulement le principe.

L'enceinte isotherme est constituée par un four vertical dont la température est réglée par un fil dilatable. L'éprouvette de 4 mm de diamètre, et longueur utile 32 ou 100 mm, possède des têtes filetées qui s'adaptent aux tiges d'amarrages; celles-ci, par un système de leviers et de poids, mettent l'éprouvette sous tension. L'extensomètre est constitué par deux tiges de silice dont les extrémités recourbées

viennent se loger dans deux évidements situés dans les têtes, dans l'axe de l'éprouvette. Le déplacement relatif de ces tiges, qui mesure l'allongement, est enregistré par un système original comportant deux leviers en série, reliés par un courant électrique qui asservit le mouvement du second à l'aide d'un servomoteur. On enregistre ainsi graphiquement l'allongement, avec une amplification 1 000, sur un tambour qui fait un tour en 24 heures.

Dans le cas des verres, nous avons dû imaginer un dispositif d'amarrage spécial, le filetage étant impraticable : l'éprouvette, de 4 mm de diamètre également et 30 mm de long, était terminée par deux têtes hémisphériques (fig. 3 a), obtenues en fondant au chalumeau les extrémités d'un barreau de verre dans un moule de graphite en deux parties; un poinçon appliqué à la partie supérieure encore fluide y ménageait l'évidement destiné aux palpeurs de l'extensomètre.

Pour fixer ces éprouvettes dans la machine, deux étriers en alliage nical venaient se visser dans les tiges d'amarrage de la machine; dans chacun venait se loger une coupelle hémisphérique en graphite (coupée en deux pour pouvoir l'introduire) de même forme que celle qui avait servi à la fabrication des têtes de l'éprouvette; celles-ci y trouvaient donc tout naturellement leur logement, avec une possibilité de rotation facilitant l'alignement, ce qui est nécessaire avec un matériau aussi fragile que le verre (fig. 3 b).

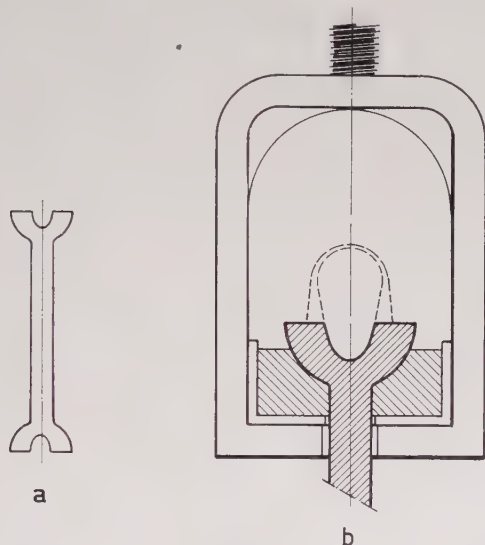


FIG. 3

Essais de fluage sur verre :

- a) Forme de l'éprouvette.
- b) Schéma des têtes d'amarrage.

L'éprouvette était dimensionnée de telle façon que les évidements se trouvaient au même écartement que dans l'éprouvette normale de 32 mm; on utilisait donc les tiges de silice correspondantes. Mais, l'ensemble dépassant 100 mm de long, il fallait usiner des tiges d'amarrage spéciales.

Pour la matière plastique (rhodoïd) aucun problème ne se posait, l'usinage de têtes filetées étant facile.

Au laboratoire des Acières d'Ugine, les essais de fluage furent exécutés sur les machines conçues par J. de Lacombe²⁰. Par leur principe elles ne diffèrent pas beaucoup des précédentes, mais s'en distinguent cependant par certains détails :

— machines plus robustes, capables d'éprouvettes plus grosses (diamètre 8 mm);

— l'élément régulateur de température des fours était constitué par le moufle même;

— extensomètre optique, type Martens, avec enregistrement photographique, sur un tambour, qui pouvait avoir deux vitesses (échelles 1 mm = 1,5 s et 1 mm = 12 mn), la vitesse rapide étant destinée à l'étude des phénomènes initiaux.

B) Essais de relaxation

La machine T. R. de Chevenard-Joumier peut aussi être utilisée pour des essais de relaxation, où, la longueur de l'éprouvette étant maintenue constante, on enregistre la décroissance de la contrainte en fonction du temps. Pour cela, la plume enregistreuse commandée par le servomoteur est liée à un ressort dont une extrémité est fixe, et l'autre tire sur le levier de mise en charge de l'éprouvette. Le contact mobile lié au second levier amplificateur (ici supprimé) est remplacé par un contact fixe, réglable; la position de ce contact définit la longueur (constante) imposée à l'éprouvette. Au fur et à mesure que l'éprouvette flue, le servo-moteur diminue la charge, de façon que le raccourcissement élastique correspondant compense l'allongement de fluage. La plume enregistre cette diminution de charge en fonction du temps.

C) Cycles couple-torsion; hystérésigraphes

1° Hystérésigraphe de Chevenard pour fils.

Un certain nombre de métaux, ainsi qu'un verre, à l'état de fils, ont été essayés en torsion alternée sur l'hystérésigraphe Chevenard²⁵, dont nous rappellerons brièvement la construction : le fil est pincé dans deux tiges d'amarrage, dont l'une est entraînée par un moteur et un bras, qui l'animent d'un mouvement de torsion sinusoïdal, de fréquence réglable dans de larges limites (de 1 cycle par seconde à 1 cycle en 1 200 s). Un système de prisme et de miroir permet d'enregistrer photographiquement une courbe en coordonnées rectangulaires, donnant le déplacement angulaire de la tête inférieure (solidaire d'un fil dynamométrique, donc proportionnelle au couple) en fonction du déplacement angulaire de la tête d'entraînement supérieure.

La torsion du fil est en réalité la différence entre les déplacements angulaires des têtes supérieure et inférieure. Il faut donc retrancher du premier une quantité égale au second, c'est-à-dire proportionnelle au couple. On obtient donc les cycles couple-torsion en coordonnées obliques; mais la construction de l'appareil est telle que l'angle des axes correspondants est constant, et presque droit.

Un four, entourant les extrémités des têtes d'amarrage et l'éprouvette, permet de porter celle-ci jusqu'à 700 ou 800°.

2° Machines de torsions alternées. Système Chevenard.

Certains cycles couple-torsion ont été enregistrés à l'ambiante, sur une machine de torsion alternée servant à l'étude de la fatigue ²⁶. Le principe de cette machine est un peu analogue à celui de la précédente; mais l'enregistrement photographique utilise le système du trépied optique, qui permet de faire « optiquement » la différence entre les déplacements angulaires des deux têtes d'amarrage; on obtient donc directement les cycles couple-torsion en coordonnées rectangulaires. L'éprouvette est un peu plus grosse que dans le cas précédent, tout en restant dans la catégorie des « microéprouvettes » : 1,5 mm de diamètre et 10 mm de long pour la portion utile.

3° Hystérésigraphe de Boulanger ²⁷.

Cet appareil permet d'enregistrer de petits cycles couple-torsion, avec forte amplification. L'éprouvette est tubulaire, de 5 mm de diamètre, ce qui permet un réglage précis de la température par des couples thermoélectriques placés à l'intérieur.

Cette éprouvette est maintenue verticalement dans un système à leviers et glissières qui lui permet de se déformer par torsion, sans frottement appréciable, tout en n'exerçant aucun effort de traction axiale; grâce à ce dispositif, on peut monter à très haute température (pratiquement jusqu'au point de fusion du fer) sans que l'éprouvette ne risque de s'allonger ou de se rompre par fluage.

Un couple est imposé à l'éprouvette par une sorte de gros cadre galvanométrique, alimenté par un courant sinusoïdal de période réglable (entre 0,6 s et 30 s). L'angle de torsion de

l'éprouvette est mesuré par un capteur de déplacement à induction (Philips). L'amplification de ce capteur est telle que les déformations de l'éprouvette correspondent à la partie externe à des distorsions (ou angle de cisaillement) de 10^{-6} à 10^{-5} .

Des signaux électriques proportionnels à ces deux grandeurs (couple et torsion) sont envoyés sur les deux paires de plaque d'un oscillographe, qui permet ainsi d'enregistrer ces cycles couple-torsion de très faible amplitude.

Lorsque ces cycles sont elliptiques, ce qui est le cas général à haute température, on peut introduire sur l'une des coordonnées électriques un déphasage réglable, qui arrive à réduire le cycle couple-torsion à une droite double. On peut ainsi mesurer directement le déphasage entre torsion et couple, tous deux étant des fonctions sinusoïdales du temps.

Notons que tout l'appareil est placé dans une cloche, où l'on peut faire le vide, ou introduire une atmosphère neutre, hélium, par exemple.

4° Mesure de l'amortissement.

Lorsque l'aire du cycle couple-torsion est très faible, elle est difficile à mesurer sur un enregistrement. On peut dans ce cas (et nous en donnerons plus loin la démonstration, d'ailleurs classique) mesurer une grandeur qui lui est proportionnelle, le *frottement interne* ou *capacité d'amortissement*, que l'on déduit du *décrément (logarithmique)* d'oscillations libres.

Cette mesure peut être faite directement sur l'hystérésigraphe Boulanger, par enregistrement des oscillations de torsion sur un châssis chronographique.

Pour les éprouvettes utilisées à la machine de torsions alternées (cf. paragraphe 2°), on peut en mesurer la *décrément* sur un micro-pendule type Chevenard ²⁶.

II. — MATERIAUX ETUDIES

Nous nous contenterons de quelques indications sommaires sur les matériaux qui ont été étudiés, très variés, métalliques ou non métalliques.

Al pur (A I et surtout A II, métaux raffinés de titre 99,997 %) et quelques aluminiums moins purs, dont la composition est indiquée sur le tableau II.

La partie stationnaire étant linéaire, on ne saurait en retirer beaucoup d'informations, si non en étudiant comment la vitesse de fluage stationnaire varie avec la contrainte ou la

TABLEAU II

MÉTAUX	Fe %	Si %	Mn %	Cu %
A IV	0,12	0,07	0,003	0,03
A V	0,25	0,17	0,005	0,03
A VI	0,51	0,35	0,01	0,03

Zn pur (Zn électrolytique à 99,99 %), contenant principalement : Pb = 0,005 %, Cd = 0,002 %, Fe = 0,0007 %.

Ni pur (Ni à 99,9 %).

Mg pur (Mg à 99,995 %).

Cu OFHC.

Fer Armco.

Acier sorbitique (acier faiblement allié, type 45 NCD 17). Deux coulées ont été utilisées, de composition voisine (en %) :

	C	Si	Mn	Ni	Cr	Mo
I	0,43	0,35	0,35	4,3	1,45	0,44
II	0,38	0,21	0,44	4,18	1,49	0,46

leur traitement consistant en une trempe à l'huile à 850°, suivie d'un revenu de 6 heures à 650°, pour une résistance à la traction de 106 kg/mm². Les micrographies électroniques de la planche 1 montrent la structure de l'acier ainsi traité.

Aciers austénitiques divers, au Cr-Ni, du type 18-8 ou 25-20 (nicral D) ou 35-12 (ATV).

Acier au silicium à 3,24 % Si, utilisé pour quelques essais.

Verre ordinaire (composition inconnue).

Verre pyrex du commerce.

Rhodoïd du commerce.

III. — MISE EN ŒUVRE DES RESULTATS

A) Courbes de fluage

La forme des courbes de fluage, avec leur composante transitoire et leur portion à vitesse stationnaire, telles qu'elles sont représentées sur la figure 2, retient dès l'abord l'attention.

température; dans ce dernier cas, on peut ainsi mesurer l'énergie d'activation correspondant au mécanisme qui contrôle la vitesse dans ce stade du fluage. De nombreuses études ont été faites à ce sujet, expérimentales¹⁸ ou théoriques (cf. (3)).

Par contre, on peut espérer trouver des renseignements intéressants dans une analyse exacte de la forme des courbes dans la partie transitoire. Nous avons vu plus haut l'intérêt qui s'attachait, au point de vue structural, à l'étude fine des phénomènes qui jouent à ce stade du fluage. Il semble important de la conjuguer avec une analyse exacte de la forme des courbes.

Enfin la manière dont on passe du fluage transitoire au fluage stationnaire constitue également un sujet d'étude intéressant.

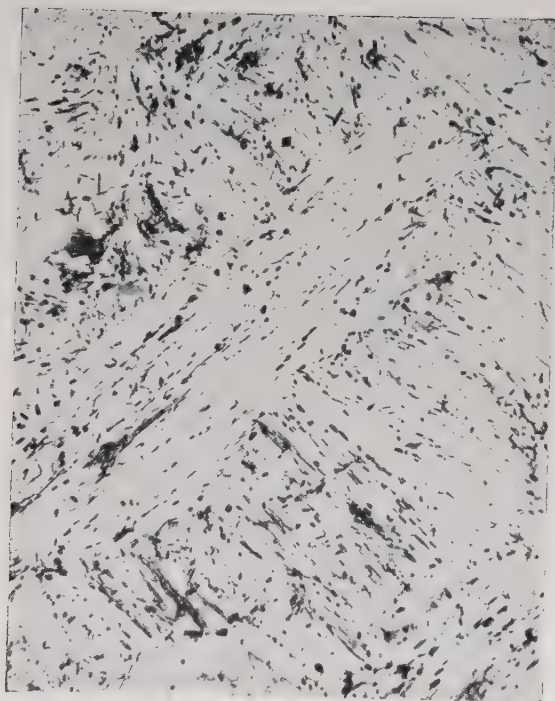
Tout ceci suppose que l'on connaisse exactement la forme des courbes de fluage, et qu'on puisse les représenter par une formule mathématique appropriée.

En cherchant dans la littérature, on trouve diverses formules empiriques qui ont été proposées pour représenter le fluage transitoire. Certaines sont logarithmiques : ainsi Phillips, puis Tapsell et Chevenard²⁸ ont trouvé une loi reliant l'allongement ε au temps t , de la forme :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a \log (1 + b t) \quad [1]$$

où ε_0 représente l'allongement à la mise en charge (élastique ou plastique). Plus récemment, divers auteurs ont retrouvé des fluages logarithmiques dans des métaux à température assez basse²⁹, surtout dans des alliages à durcissement structural et pour de faibles allongements.

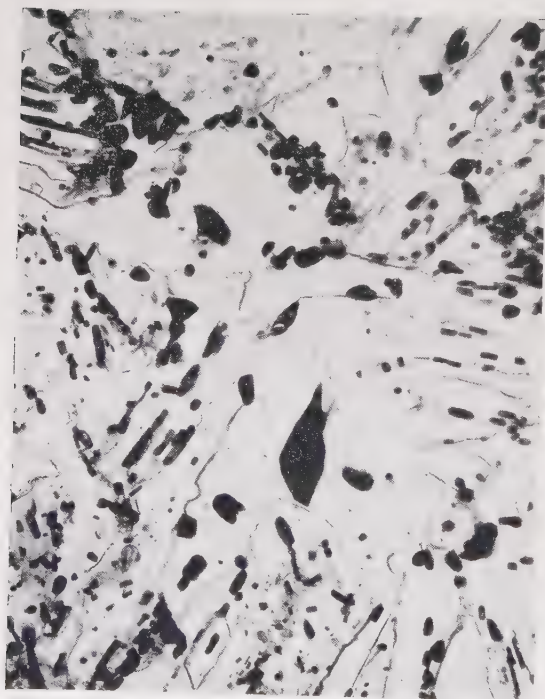
Mais la formule la plus couramment employée (et qui s'applique le mieux), surtout



a) $\times 7.500$



b) $\times 15.000$



c) $\times 17.000$



d) $\times 22.000$

PLANCHE I

Micrographies électroniques : acier sorbitique.
Trempe à l'huile à 850° et revenu 6 heures à 650°.

pour les métaux et alliages essayés à température assez élevée, est représentée par une loi parabolique :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a t^m \quad (0 < m < 1) \quad [2]$$

Depuis les premiers travaux vérifiant cette loi parabolique^{19, 20, 30, 31, 32}, de nombreux auteurs l'ont retrouvée sur des métaux très variés. Andrade⁸ le premier avait proposé une loi entrant dans le cadre de la formule [2], avec une valeur particulière de $m = 1/3$, et c'est surtout sur cette « loi d'Andrade » qu'ont porté les vérifications.

La manière dont cette vérification est faite en général appelle une remarque sur l'analyse mathématique de courbes expérimentales, qui mérite d'être signalée ici en passant. Beaucoup d'auteurs se sont contentés, pour « vérifier » la loi d'Andrade (loi [2] avec $m = 1/3$), de mesurer ε_0 sur la courbe enregistrée, et de porter sur un graphique $(\varepsilon - \varepsilon_0)$ en fonction de $t^{1/3}$ pour voir si les points s'alignent sur l'origine; mais cette vérification est un peu illusoire, car, dans l'intervalle de temps exploré, une loi du genre [2] avec $m = 0,25$ ou $0,45$, donne des points alignés de façon satisfaisante. Une méthode également employée par d'autres auteurs est, toujours avec ε_0 , mesuré directement sur l'enregistrement, de porter $\log(\varepsilon - \varepsilon_0)$ sur un graphique en fonction de $\log t$; si les points s'alignent sur une droite, la pente de celle-ci mesure l'exposant m .

Cette méthode, apparemment simple et satisfaisante, n'est en réalité pas à l'abri de tout reproche, bien au contraire. La moindre erreur sur la mesure de ε_0 entraîne une erreur notable sur m . C'est ce qu'illustre la figure 4 : nous avons pris une loi $\varepsilon - \varepsilon_0 = t^{0,5}$ (courbe inférieure); puis nous avons supposé qu'on ait tracé cette courbe (correspondant à l'enregistrement expérimental), et remesuré les points de cette courbe sans erreur, sauf une erreur de 1 (par défaut) sur ε_0 . On voit que les points s'alignent de façon apparemment satisfaisante sur une droite de pente 0,43.

Or, une erreur de ce genre sur ε_c est très possible, pour trois raisons :

— l'une expérimentale, car il est difficile de situer avec exactitude l'origine d'une courbe à tangente verticale;

— l'autre physique, car une mise en charge trop rapide peut introduire des perturbations au début du fluage, au moins dans les métaux mous comme l'aluminium^{31, 32};

— la troisième tient à la loi même du fluage, car il y a lieu de penser que tout au début de la courbe, la vitesse de fluage n'est pas infinie³⁰, en sorte que la loi [2] ne serait qu'une approximation. C'est ce que nous avons vérifié grâce à l'enregistrement photographique très rapide du début des courbes de fluage sur les machines d'Ugine⁴¹ (cf. chapitre cinquième, I, H. 1°).

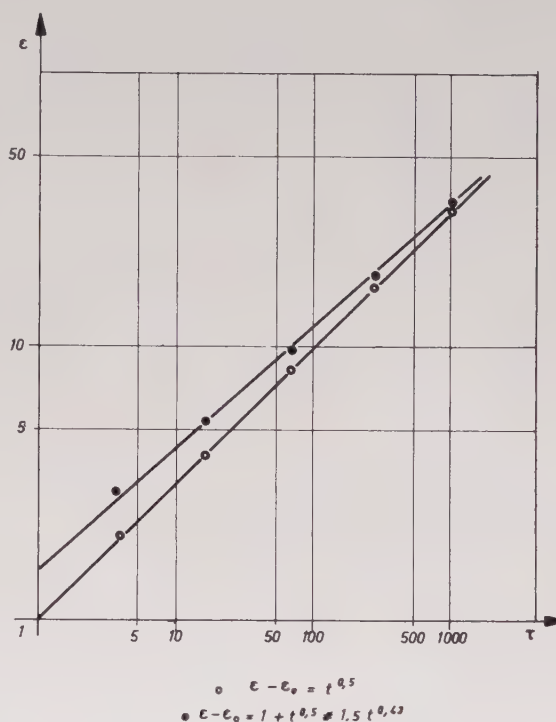


FIG. 4

Anamorphose double logarithmique, avec erreur sur ε_0 .

Pour toutes ces raisons, les vérifications expérimentales de la valeur $m = 1/3$ ne doivent pas être considérées comme satisfaisantes; la loi d'Andrade n'est pas aussi généralement suivie par le fluage qu'on ne l'admet. Ces vérifications prouvent tout au plus que le fluage suit une courbe « tendue » du genre parabole.

Une détermination correcte de m doit s'affranchir des perturbations d'ordre divers introduites par le début de la courbe, qu'elle doit donc ignorer. Il faut donc utiliser une méthode différentielle.

Dans certains cas, nous avons mesuré sur la courbe enregistrée, la vitesse de fluage $d\varepsilon/dt$. Si la loi [2] est vérifiée, on doit avoir :

$$d\varepsilon/dt = m a t^{m-1} \quad [3]$$

Dans cette formule, ε_0 a disparu, avec toutes les incertitudes qui en découlent. On peut alors représenter sur papier double logarithmique $d\varepsilon/dt$ en fonction de t . Les points doivent s'aligner sur une droite de pente (négative) $m - 1$.

Pour s'affranchir de la mesure des pentes, longue et fastidieuse quand on doit élaborer de nombreuses courbes, nous avons souvent préféré utiliser une *méthode aux différences finies*, plus rapide, préconisée par J. de Lacombe²⁰. Rappelons brièvement en quoi elle consiste :

On choisit des temps en progression géométrique de base k .

$$t_1, t_2 = kt_1, t_3 = k^2 t_1 \dots t_p = k^{p-1} t, \text{ etc.}$$

On mesure les allongements correspondants :

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_p$$

et on calcule les différences successives d'allongement (c'est en cela qu'il s'agit d'une méthode aux différences finies).

$$\Delta \varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \quad \Delta \varepsilon_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2,$$

$$\Delta \varepsilon_p = \varepsilon_{p+1} - \varepsilon_p, \text{ etc.}$$

On voit que, si l'allongement obéit à la loi [2], les $\Delta \varepsilon$ (dont ε_0 et ses incertitudes sont éliminés) suivent également une progression géométrique où :

$$\Delta \varepsilon_p = a t_1^m (k^m - 1) \times k^{m(p-1)} \quad [4]$$

En reportant sur un papier double logarithmique $\Delta \varepsilon_p$ en fonction de t_p , les points, si la loi de fluage est parabolique, s'alignent sur une droite de pente m . Entre les points ainsi obtenus, qui sont d'ailleurs régulièrement espacés dans l'échelle logarithmique, on peut en intercaler d'autres, en prenant une autre valeur de t_1 . On peut changer à volonté la raison k de la progression, pour resserrer ou écarter les points, mais le plus commode est d'utiliser $k = 2$, valeur que nous avons prise en général.

Si, en employant cette méthode, l'analyse fournit une droite horizontale, cela signifie que $\Delta \varepsilon_p$ est constant; pour des points t_p en progression géométrique, cela correspond à une loi de fluage en $\log bt$ qui, lorsque bt est

beaucoup plus grand que l , correspond à la loi logarithmique [1]. Dans ce cas, $d\varepsilon/dt$ est proportionnel à $1/t$.

Enfin, si l'on trouve une droite descendante, de pente négative, cela signifie que la loi de fluage est hyperbolique, du type :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - a t^m \quad (m < 0) \quad [5]$$

On remarque que, lorsqu'on élabore la courbe par une méthode différentielle (aux différences finies ou par la dérivée), la forme intermédiaire entre les courbes *paraboliques* ($m > 0$) et les courbes *hyperboliques* ($m < 0$) correspond à une courbe *logarithmique*, pour laquelle on peut dire que « l'exposant m est nul », signifiant par là que la loi logarithmique apparaît comme une limite d'une loi du type [2] quand $m \rightarrow 0$ et $a \rightarrow \infty$. Cette comparaison des formes ignore évidemment quelques difficultés tout près de l'origine des temps, sur lesquelles nous reviendrons, mais qui sont sans importance pratique tant qu'on n'enregistre pas à grande vitesse les tous premiers instants du fluage.

Les trois types de loi que nous venons d'indiquer sont les plus simples que l'on puisse imaginer pour représenter des courbes du genre de celles observées dans le fluage, c'est-à-dire des courbes à pente décroissante, mais de plus en plus lentement au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'origine. On pourrait encore invoquer une loi exponentielle, par exemple.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - a e^{-\lambda t} + c t \quad [6]$$

formule invoquée par McVetty³³ pour rendre compte des courbes de fluage. Mais une loi de ce genre ne correspond pas du tout, en général, aux courbes de fluage réelles, alors que les trois autres types, parabolique, logarithmique ou hyperbolique, se rencontrent réellement, comme nous le verrons plus loin, surtout le premier.

Remarquons qu'il peut fort bien se trouver que les points obtenus (en diagramme double logarithmique) par notre analyse différentielle s'alignent sur une droite, mais pour une portion seulement de la courbe. Cela signifiera que, dans cette portion, la courbe est assimilable — « osculatrice » pourrait-on dire — à une parabole (ou hyperbole) d'exposant correspondant à la pente de ce bout de droite. On serait alors tenté d'appeler cette élaboration « *analyse parabolique* » locale.

En ce qui concerne l'analyse des courbes, le passage du fluage transitoire au fluage stationnaire, ou même réaccélérée, pose un problème intéressant. Andrade⁸ avait déjà indiqué une formule complète :

$$1 + \varepsilon = (1 + \varepsilon_0) (1 + a t^{1/3}) e^{bt} \quad [7]$$

rendant assez bien compte de l'ensemble des courbes obtenues.

Du point de vue empirique, l'analyse la plus simple et la meilleure semble être celle de J. de Lacombe²⁰, qui a remarqué que, sur ses analyses différentielles, la partie initiale était bien droite (correspondant à une parabole); c'est pour des temps assez considérables seulement que les points expérimentaux s'écartent de la droite, traduisant l'intervention des fluages secondaire et tertiaire. En reportant cet écart en fonction des époques correspondantes, on obtient une courbe qui représente en fait l'analyse de la loi reliant la quantité $(\varepsilon - \varepsilon_0 - a t^m)$ au temps t . J. de Lacombe avait observé que cette courbe est, en coordonnées doubles logarithmiques, une droite de pente > 1 , c'est-à-dire que l'on peut représenter l'ensemble de la courbe de fluage par l'expression :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a t^m + b t^n \quad (m < 1; n > 1) \quad [8]$$

Cette loi, empiriquement satisfaisante et simple, fait apparaître le fluage comme la somme d'un terme ralenti et d'un terme accéléré. Le fluage stationnaire en particulier se réduit à une simple inflexion, plus ou moins prolongée. Cette interprétation peut correspondre à la réalité dans quelques cas, notamment pour les fluages importants et assez rapides. Mais elle n'est pas satisfaisante si l'on admet que le fluage secondaire correspond à un véritable régime stationnaire, sur lequel viendrait se greffer un phénomène parasite produisant la réaccélération.

Cette remarque soulève un point délicat. Dès maintenant nous pouvons remarquer que, dans la plupart de ses analyses de courbes de fluage complètes présentant une longue partie de fluage stationnaire, J. de Lacombe a été conduit à choisir $n > 1$ (allant par exemple de 1,05 à 1,2) pour compenser la concavité vers le bas du premier terme en t^m , par un terme à concavité tournée vers le haut, de façon que la somme donne approximativement une droite. Il semblerait plus satisfaisant pour l'esprit que le *fluage primaire corresponde à un terme véritablement transitoire qui s'efface*

pour faire place au régime stationnaire. Nous verrons plus loin qu'on peut trouver des expressions mathématiques satisfaisant à cette condition, tout en représentant avec une très bonne approximation, au début, une loi du type [2].

B) Cycles couple-torsion

Quand on dispose d'un enregistrement d'un cycle couple-torsion où la torsion (ou bien le couple) est imposée comme fonction sinusoïdale du temps, à période connue, on peut en déduire à tout moment la *vitesse de fluage*, mais à condition de faire une hypothèse : c'est que *pour les vitesses infinies, le cycle se réduit à une droite double, élastique*; l'écart par rapport à cette déformation élastique proportionnelle est dû au fluage, et explique l'enflure du cycle observé. Ce sera le cas pour des déformations visco-élastiques.

On peut alors écrire :

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial C} dC + \frac{\partial \alpha}{\partial t} dt \quad [9]$$

(variables imposées C, t)

ou :

$$dC = \frac{\partial C}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial C}{\partial t} dt \quad [9 \text{ bis}]$$

(variables imposées α, t)

d'où l'on tire la *vitesse de fluage*, en posant $\frac{\partial C}{\partial \alpha} = k_1$:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = V = \frac{dC}{dt} \left(\frac{d\alpha}{dC} - \frac{1}{k_1} \right) = \frac{d\alpha}{dt} - \frac{1}{k_1} \frac{dC}{dt} \quad [10]$$

ou la *vitesse de relaxation* :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(\frac{dC}{d\alpha} - k_1 \right) \frac{d\alpha}{dt} \quad [10 \text{ bis}]$$

Si l'on peut mesurer, aux très grandes vitesses par exemple, le coefficient de torsion élastique (ou « non relaxé ») k_1 , ainsi que la pente du cycle couple-torsion, $\frac{dC}{d\alpha}$, en divers points, on peut donc calculer à ces mêmes points la vitesse de fluage ou de relaxation.

Ces deux grandeurs sont d'ailleurs deux manifestations du même phénomène de fluage; dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, elles sont liées par la relation

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -k_1 V \quad [11]$$

Nous verrons par la suite des exemples de courbes obtenues de cette façon, représentant la vitesse de relaxation en fonction du couple (fig. 33, 35, 37, 38, 39, 44, 46).

La situation serait plus compliquée si notre hypothèse de départ n'était plus vérifiée, c'est-à-dire si les cycles décrits à très grande vitesse n'étaient pas des droites doubles, correspondant à des déformations élastiques. On aurait alors un cycle plastique limite, correspondant à une plasticité quasi instantanée. Bien que ceci soit impossible en toute rigueur, nous avons vu au chapitre premier qu'une notion de ce genre peut correspondre approximativement au comportement de certains matériaux, où des déformations plastiques peuvent se produire très rapidement, alors que le fluage vient s'y superposer beaucoup plus lentement. Dans ce cas, il faudrait définir un module plastique, ou taux de consolidation

$$p = \frac{\partial C}{\partial \alpha} \quad [12]$$

variable d'un point à l'autre. On aurait alors, pour les vitesses de relaxation $\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)$ et de fluage (V) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(\frac{dC}{d\alpha} - p\right) \frac{d\alpha}{dt} \quad [13]$$

$$V = -p \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{dt}{d\alpha} - \frac{1}{p} \frac{dC}{dt}$$

Mais il devient très difficile de mesurer p , et même de le définir : on ne sait en effet *a priori* s'il faut le définir en fonction du couple, de la torsion totale ou, ce qui pourrait avoir un fondement physique, en fonction de la déformation de fluage. En somme, la forme des cycles couple-torsion dépend de deux fonctions inconnues : p et V (ou $\frac{\partial C}{\partial t}$) ; d'où une situation inextricable, sur laquelle nous ne pourrions faire d'étude complète.

Si l'on ne cherche pas à connaître comment la vitesse de fluage évolue point par point, on

peut obtenir sur le fluage un renseignement global, intéressant, en déterminant l'énergie dissipée à chaque cycle par hystérésis. Rappelons à ce sujet quelques définitions classiques. Cette énergie est mesurée par l'aire du cycle enregistré évaluée en unité de travail, soit ΔW ; elle n'est pas intéressante en soi, mais en valeur relative, par rapport à l'énergie élastique emmagasinée à l'extrémité du cycle, par exemple au point d'élongation maximale α_0 (fig. 5) et mesurée par l'aire W du triangle $O\alpha_0 P$. Ainsi, de l'énergie maximale nécessaire pour déformer l'éprouvette, une fraction $\Delta W/W$ est dissipée à chaque cycle par hystérésis mécanique.

Supposons qu'à l'éprouvette soit suspendu un volant, oscillant librement, et dont on étudie le mouvement après l'avoir lancé. La dissipation d'énergie par hystérésis va provoquer l'amortissement des oscillations. C'est bien au moment de l'élongation maximale (P, fig. 5) qu'il faut calculer l'énergie potentielle W de l'éprouvette, car à ce moment la vitesse du pendule est nulle, donc aussi son énergie cinétique. La différence des aires W entre deux élongations maximales α_0 successives est bien égale au travail dissipé, c'est-à-dire à l'aire du cycle ; c'est pourquoi nous avons appelé celle-ci ΔW .

Dans le cas représenté sur la figure 5, ΔW est plus grand que W , en sorte que l'amortissement serait hypercritique.

Considérons maintenant le cas où l'amortissement est faible, donc le cycle très aplati.

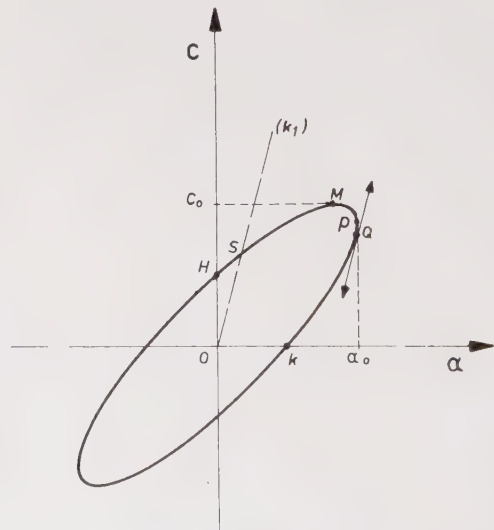


FIG. 5

Schéma d'un cycle couple-torsion avec hystérésis.

Les pentes de OP et OM sont presque confondues, et égales au coefficient de torsion K. Dans ce cas *, on peut écrire :

$$W = 1/2 K \alpha_o^2 \quad [14]$$

d'où par différentiation :

$$\Delta W/W = 2 \Delta \alpha_o/\alpha_o \quad [15]$$

Le rapport $\Delta \alpha_o/\alpha_o$ mesure la décroissance d'amplitude pendant une période; on l'appelle *décrément logarithmique*, δ , qui vaut donc $\frac{\Delta W}{2 W}$.

Tout ce que nous venons de dire s'applique à des cycles couple-torsion de forme quelconque. Considérons maintenant le cas particulier, mais encore très fréquent, où ces cycles sont elliptiques; on les rencontre en particulier pour tous les matériaux à comportement visco-élastique linéaire. La torsion et le couple sont alors deux fonctions sinusoïdales du temps, déphasées d'un angle ψ :

$$\alpha = \alpha_o \sin \omega t \quad [16]$$

$$C = C_o \sin (\omega t + \psi)$$

* L'équation [14] est valable dans un autre cas : celui de cycles de forme quelconque, mais décroissant *homothétiquement*. En effet, la pente de OP reste constante; on peut prendre sa valeur pour coefficient K.

on trouve facilement que :

$$\delta = \frac{\Delta W}{2 W} = \pi \operatorname{tg} \psi \quad [17]$$

relation importante liant le décrément au déphasage.

Dans le cas de cycles aplatis, où ψ est faible, OM et OP presque confondus, on peut définir un *coefficient de torsion ou module élastique* moyen, mesuré par la pente du grand axe de l'ellipse. C'est lui qui détermine la période d'oscillation dans le cas où un volant est suspendu à l'éprouvette. Ainsi, dans l'hystéresigraphie de Boulanger, on peut déterminer la valeur G_T/G_{20} du module de Coulomb à la température T, rapportée à sa valeur à l'ambiante, soit en mesurant à T° et à 20° la pente moyenne du cycle dans le cas d'oscillations forcées; soit pour des oscillations libres, en mesurant les périodes d'oscillation.

Pour des cycles plus enflés, la détermination du module devient illusoire, et la période d'oscillation d'un volant suspendu à l'éprouvette ne peut être calculée qu'en *faisant des hypothèses sur le comportement visco-élastique du matériau*. D'autres grandeurs peuvent être mesurées sur les cycles couple-torsion, et donner des renseignements intéressants sur le fluage; mais leur interprétation exige des hypothèses du même genre. On est amené à concevoir un certain nombre de modèles, à en déduire des conséquences et à confronter celles-ci à l'expérience. C'est pourquoi nous allons passer en revue, dans la partie suivante, les modèles classiques.

CHAPITRE QUATRIÈME

MODELES RHEOLOGIQUES CLASSIQUES

La rhéologie, science de « l'écoulement » des corps, a longtemps considéré ceux-ci comme formés de portions élastiques et d'autres portions visqueuses, dont le comportement pouvait être représenté par un ensemble de *ressorts* et d'*amortisseurs*. Ces modèles rendent compte des équations liant les variables *déformations* et *contraintes* et leurs *dérivées premières*. En

toute rigueur ces variables devraient être définies à l'aide de tenseurs. Mais pour simplifier l'exposé, nous nous contenterons de prendre des variables correspondant à des vecteurs parallèles : une contrainte que nous noterons σ , et une déformation que nous noterons ε ; ce sera, par exemple, la contrainte normale principale et l'allongement. Dans le

cas des cycles décrits à l'hystérésigraphe, nous utiliserons les variables C (couple) et α (angle de torsion).

On définit successivement :

— *solide de Hooke*, appellation qui désigne simplement un ressort;

— *liquide de Newton*, désignant un amortisseur linéaire;

— *liquide de Maxwell*, désignant un ressort et un amortisseur en série;

— *solide de Kelvin-Voigt*, représentant un ressort et un amortisseur en parallèle;

— enfin, si à un solide de Kelvin-Voigt on ajoute en série un ressort, on obtient un *modèle de Boltzmann ou de Thomson**, sur lequel nous allons nous étendre, car il servira de base à notre discussion.

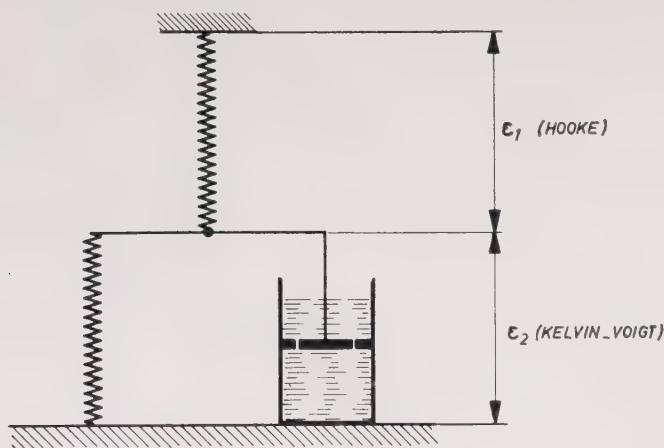


FIG. 6

Schéma d'un modèle de Boltzmann.

Tous les modèles dont nous venons de parler s'appliquent à des corps à comportement visco-élastiques. Plus récemment, certains rhéologues ont inventé des modèles s'appliquant à des déformations plastiques pures et faisant appel à des modèles à « frottement solide » appelés « patins »³⁴. On n'a probablement pas encore tiré de l'étude de ces mo-

dèles tous les renseignements que l'on en peut attendre. Mais comme notre étude porte sur le fluage transitoire, de faible amplitude, nous nous bornerons à l'emploi de modèles visco-élastiques, en cherchant tous les cas réels auxquels ils peuvent s'appliquer. Nous pourrions ainsi mieux comprendre leurs limites d'emploi, surtout lorsqu'il s'agit de représenter le comportement de métaux plastiques à température relativement basse; dans ce cas, l'introduction de modèles « à frottement solide » s'avérerait intéressante, mais nous n'en ferons pas ici l'étude, nous réservant de donner quelques indications sommaires dans les passages où nous parlerons de déformation plastique « pure » (c'est-à-dire sans viscosité).

Revenons au *modèle de Boltzmann*; il semble *a priori* le plus intéressant car, comme l'a montré Zener⁷, il rend bien compte de certains phénomènes de relaxation dans les métaux.

La figure 6 schématise un tel modèle. L'allongement total ε est la somme de l'allongement ε_1 du ressort supérieur, ou solide de Hooke, et de l'allongement ε_2 du solide de Kelvin-Voigt qui se trouve en dessous. On a donc la relation :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad [18]$$

Nous supposons pour plus de généralité (ce qui n'est pas toujours fait) que le ressort et l'amortisseur de la partie inférieure ne sont pas linéaires; leurs résistances s'ajoutent pour équilibrer la tension du ressort supérieur, en sorte qu'au total la contrainte transmise par le modèle peut s'écrire :

$$\sigma = k_1 \varepsilon_1 = f(\varepsilon_2) + \mu \left(\frac{d\varepsilon_2}{dt} \right) \quad [19]$$

Dans ce modèle, la vitesse de fluage est représentée par la vitesse de déformation de la partie inférieure, c'est-à-dire de la partie comportant un élément visqueux. Elle s'écrit :

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{k_1} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} \left(1 - \frac{1}{k_1} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right) \quad [20]$$

Remarquons que cette formule se prête à une détermination expérimentale de la vitesse de fluage, dans le cas où la déformation ε est imposée en fonction du temps, et que l'on enregistre la contrainte σ .

* Nous suivons ici la terminologie de Reiner⁶⁰. Mais pour ce modèle, d'autres auteurs utilisent des noms différents (solide de Zener...).

Dans le cas où le deuxième ressort est linéaire, c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$f(\varepsilon_2) = k_2 \varepsilon_2 \quad [21]$$

la vitesse de fluage est déterminée théoriquement par l'équation suivante :

$$\mu \left(\frac{d\varepsilon_2}{dt} \right) = \sigma - k_2 \varepsilon_2 = k_2 \left(\frac{\sigma}{k_R} - \varepsilon \right) \quad [22]$$

dans laquelle est utilisé le *coefficient élastique relaxé*, k_R donné par l'expression :

$$k_R = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

L'équation [22] peut être utile dans le cas des métaux, où souvent la viscosité n'est pas linéaire.

Enfin, si la viscosité elle-même est linéaire, c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$\mu \left(\frac{d\varepsilon_2}{dt} \right) = \mu \cdot \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad [23]$$

on obtient l'équation complète du modèle de Boltzmann :

$$\sigma + \tau_\varepsilon \frac{d\sigma}{dt} = k_R \left(\varepsilon + \tau_\sigma \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \quad [24]$$

dans laquelle interviennent deux temps de relaxation, le *temps de relaxation à déformation constante*, τ_ε et le *temps de fluage à contrainte constante*, τ_σ , donnés par les expressions suivantes :

$$\tau_\varepsilon = \mu \frac{k_R}{k_1 k_2} \quad \tau_\sigma = \frac{\mu}{k_2} \quad [25]$$

Ces expressions ont été introduites par C. Zener dans son traité aujourd'hui classique sur l'anélasticité.

Pour des torsions cycliques, les grandeurs σ et ε sont décalées dans le temps, d'un déphasage ψ , qui mesure le frottement interne δ :

$$\delta = \pi \operatorname{tg} \psi = \frac{\omega (\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)}{1 + \omega^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon} \quad [26]$$

On remarquera que le rapport des deux temps de relaxation, $\tau_\varepsilon/\tau_\sigma$ est égal au rapport k_R/k_1 des deux modules élastiques, relaxé et non relaxé.

Nous allons étudier l'application du modèle de Boltzmann aux divers appareils que nous avons utilisés, en donnant dans le texte seulement les résultats principaux, et rejetant en annexe le détail des calculs.

1° Essai de fluage sous contrainte constante

C'est le cas réalisé pratiquement dans toutes les machines de fluage utilisées, tant que la déformation n'est pas trop forte.

L'équation [24] se réduit alors à :

$$\varepsilon + \tau_\sigma \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{k_R} \quad [27]$$

d'où la loi de fluage transitoire :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k_R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}} \right) + \frac{\sigma}{k_1} \quad [28]$$

Si, à ce modèle, on ajoutait en série un amortisseur, on retrouverait la loi de fluage, proposée par McVetty pour rendre compte de l'ensemble du fluage primaire et secondaire (formule [6]).

2° Hystérésisgraphe type Chevenard

Dans cet appareil, la déformation angulaire (déplacement de la tête d'amarrage supérieure) est imposée. C'est une fonction sinusoïdale du temps.

$$\alpha = \alpha_0 \sin \omega t$$

L'inertie de l'autre tête d'amarrage n'intervient pas, car ses déplacements sont négligeables. L'équation du mouvement se réduit donc à l'équation [24] et l'on peut récrire avec les variables α et C (couple) :

$$C + \tau_\sigma \frac{dC}{dt} = k_R \left(\alpha + \tau_\varepsilon \frac{d\alpha}{dt} \right) \quad [29]$$

La résolution de cette équation est classique, ainsi que la formule donnant le déphasage ψ entre le couple et la torsion. On trouve :

$$C = C_0 \sin (\omega t + \psi)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega (\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)}{1 + \omega^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon} \quad [30]$$

Le détail des calculs est donné dans l'annexe I; nous y avons ajouté quelques formules nouvelles, particulièrement intéressantes pour les vérifications expérimentales. Par exemple, l'ouverture du cycle couple-torsion peut être caractérisé par la hauteur à l'origine, OH (fig. 5), qui vaut :

$$C_0 \sin \psi = k_R \alpha_0 \frac{\omega (\tau_c - \tau_a)}{1 + \omega^2 \tau_a^2} \quad [31]$$

Il est expliqué dans l'annexe I comment les fonctions [30] ou [31] définissent un « *pic de relaxation* ».

La vitesse de fluage, également fonction sinusoïdale du temps, peut s'écrire :

$$V = V_0 \sin (\omega t + \psi + \psi') \quad [32]$$

les grandeurs V_0 et ψ' sont calculées dans l'annexe.

Le liquide de Maxwell apparaît comme un cas particulier du modèle de Boltzmann, quand on fait tendre vers 0 la résistance du ressort en parallèle avec l'amortisseur, k_2 . Un tel matériau est capable de fluer indéfiniment sous charge constante; la formule [25] montre d'ailleurs que τ_c (ou τ_σ) tend vers l'infini.

Les cycles couple-torsion présentent dans ce cas une particularité intéressante³⁵ : à l'endroit où ils coupent l'axe des couples (O_α , fig. 5), leur pente est égale au module élastique (module non relaxé, k_1). Cette particularité permet de reconnaître facilement si l'on a affaire à un « liquide » (de Maxwell) ou à un « solide » (de Boltzmann par exemple).

3° Hystérésigraphe type Boulanger

Dans cet appareil, on impose un couple électromagnétique, fonction sinusoïdale du temps :

$$C_0 \sin (\omega t + \psi)$$

(nous convenons de garder l'origine des temps au moment où la torsion α s'annule). Mais le mouvement de cet appareil est compliqué par l'existence d'une masse oscillante non négligeable : équipement et cadre galvanométrique

suspendu sous l'éprouvette. Il faut faire intervenir son moment d'inertie, I . Pour cela, on retranche du couple électromagnétique :

$$C_0 \sin (\omega t + \psi),$$

un terme d'inertie; si bien que sur l'éprouvette le couple qui s'exerce est en réalité :

$$C = C_0 \sin (\omega t + \psi) - I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \quad [33]$$

En portant cette valeur dans l'équation [29], on obtient l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \tau_a I \frac{d^3 \alpha}{dt^3} + \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k_1 \tau_a \frac{d \alpha}{dt} + k_R \alpha \\ = C_0 [\sin (\omega t + \psi) + \omega \tau_a \cos (\omega t + \psi)] \end{aligned} \quad [34]$$

Le détail des calculs et leur discussion, beaucoup plus compliqués que dans le cas précédent, sont exposés dans l'annexe II. On y trouve en particulier les formules donnant le déphasage

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega (k_1 - k_R) \tau_a}{k_R + \omega^2 (k_1 \tau_a^2 - I) - \omega^4 I \tau_a^2} \quad [35]$$

et l'amplitude maximum α_0 atteinte pour un couple C_0 donné

$$\frac{\alpha_0^2}{C_0^2} = \frac{1 + \omega^2 \tau_a^2}{(k_R - I \omega^2)^2 + \omega^2 \tau_a^2 (k_1 - I \omega^2)^2} \quad [36]$$

Le modèle rhéologique correspondant admet trois cas limites :

— *solide de Kelvin-Voigt* : k_1 tend vers l'infini; on retombe alors sur le cas classique des mouvements amortis (mouvements d'une masse dans un liquide visqueux, ou circuits oscillants par exemple). On commet souvent l'erreur d'appliquer les équations correspondantes au mouvement d'un pendule amorti par le frottement interne du fil de suspension (comme dans notre hystérésigraphe), alors qu'en réalité aucun matériau solide ne correspond à ce modèle.

liquide de Maxwell : k_2 et k_R tendent vers 0, et τ_c vers l'infini. Ce cas correspondrait à

celui d'un corps pouvant fluier indéfiniment; on peut penser qu'en approchant de leur point de fusion, les métaux se comportent de cette façon; nous verrons qu'en fait, au moins aux faibles charges, les aciers, même à 100° en dessous de leur point de fusion, semblent conserver un module relaxé non nul.

— *matériau à relaxation faible* : $k_1 - k_R$ reste petit. C'est le cas, en général, des phénomènes de relaxation qui se présentent à basse température.

L'étude des variations de $\text{tg } \psi$ permet de définir les conditions où cette grandeur, donc le frottement interne, deviennent infinis, ou bien passent par un maximum ou un minimum. Pour chaque valeur du paramètre $\chi = k_R/k_1$ (qui dépend des matériaux considérés et du phénomène de relaxation entrant en jeu dans la zone de température étudiée*), on peut définir ces conditions à l'aide de *variables réduites* :

$$\lambda = \tau_a^2 \frac{k_1}{I} \quad [37]$$

$$\xi = \omega^2 \frac{I}{k_1}$$

faisant intervenir les deux facteurs que l'on peut faire varier expérimentalement ω (fréquence des oscillations imposées) et τ_a (qui dépend de la température). Dans l'hystérésigraphe Boulanger, d'après les valeurs de fréquences indiquées à l'annexe II, ω^2 est toujours inférieur à k_1/I , de sorte, de sorte que nous limiterons au cas où $\xi \leq 1$.

On peut donc étudier les variations de $\text{tg } \psi$, soit à fréquence (ou ξ) constante, soit à température (ou λ) constante. La figure 77 (annexe II) résume les différents cas possibles : la courbe AB correspond à $\text{tg } \psi$ infini; au-dessus de AB, $\text{tg } \psi$ est négatif et positif au-dessous. La courbe AC correspond à un maximum de $\text{tg } \psi$. On voit donc que, à fréquence (ou ξ) constante et température (ou λ) variable, $\text{tg } \psi$ présente soit un maximum (pic de relaxation), soit une valeur infinie (pseudo-

résonance), selon que ω^2 est supérieur ou inférieur à k_R/I ($\xi \gtrless \chi$).

A température (ou λ) constante, il y a toujours une valeur infinie de $\text{tg } \psi$; en outre, si l'on se trouve à droite de l'abscisse du point M, on rencontre en deux points la courbe CMD, correspondant à un extremum de $\text{tg } \psi$, un maximum (pic de relaxation) sur CM et un minimum sur MD; pour cela, il faut que $(\lambda - 1)^2 > 12 \chi \lambda$.

On remarque que, contrairement au cas de l'hystérésigraphe Chevenard, τ_a et ω cessent de jouer des rôles symétriques. Ceci se traduit en particulier par l'absence de maximum de $\text{tg } \psi$ à fréquence (ou ξ) constante quand celle-ci est faible, par l'écart entre les courbes MC et AC donnant les pics de relaxation à ω ou à τ_a constant (cet écart disparaît pour les grandes valeurs de τ_a , c'est-à-dire aux températures basses par rapport à celles où le phénomène de relaxation considéré est actif), et par l'absence de pic de relaxation à température (ou λ) constante quand λ est faible (à gauche du point M).

De cette absence de symétrie résulte en particulier qu'on ne peut superposer par simple translation deux courbes (frottement interne-température) obtenues pour deux fréquences différentes, c'est-à-dire qu'on ne peut calculer de façon simple la *chaleur d'activation* du phénomène de relaxation mis en jeu.

D'autre part, aux fréquences élevées, on observe une « pseudo-résonance » amortie, correspondant aux valeurs infinies de $\text{tg } \psi$. Nous attribuons à ce phénomène le nom de pseudo-résonance, en réservant celui de « résonance » à la fréquence pour laquelle, à τ_a constant, α_0 passe par un maximum. On démontre (annexe II) que les deux fréquences correspondantes sont en général différentes.

Oscillations libres : On peut enfin (annexe II, II°) essayer de calculer la fréquence et l'amortissement du même hystérésigraphe oscillant librement. Le cas général, nécessitant la résolution d'une équation du troisième degré, est extrêmement compliqué. Mais on peut trouver des valeurs approchées dans les trois cas limites définis ci-dessus. On voit alors que, sauf pour le cas particulier des relaxations faibles, la fréquence d'oscillations libres diffère de celle de pseudo-résonance qui rend $\text{tg } \psi$ infini; pour les relaxations faibles cependant, il y a équivalence entre les deux cas, au second ordre près en $(k_1 - k_R)$.

* Nous ne traitons ici que le cas d'un phénomène de relaxation unique. Lorsqu'il y en a deux, ou plusieurs, la description du phénomène devient plus complexe. Il faut en particulier savoir si les phénomènes agissent « en série » ou en « parallèle », et s'il y a additivité des temps de relaxation ou des vitesses de fluage.

CHAPITRE CINQUIEME

RESULTATS EXPERIMENTAUX

I. — ESSAIS DE FLUAGE SOUS CHARGE CONSTANTE

Nous avons appliqué la méthode d'analyse aux différences finies exposée plus haut (chapitre troisième, III) aux courbes de fluage obtenues sur de nombreux matériaux, et vérifié en général la validité de la formule [2]. Des courbes de recouvrance (contraction spontanée après décharge) ont aussi été enregistrées, et quelques-unes analysées. Nous allons donner quelques détails sur ces résultats.

A) Aluminiums

Plus de cent courbes de fluage ont été enregistrées, surtout sur de l'aluminium raffiné A II. Un certain nombre de résultats et d'observations ont été exposés ailleurs^{9, 30, 31, 13}, surtout en ce qui concerne l'aspect des lignes de glissement, la fragmentation des grains au cours du fluage, par polygonisation, et l'influence des joints intergranulaires (équicohésion). Mais l'ensemble de ces résultats, du point de vue rhéologique (forme des courbes) n'avait pas encore été publié; il est présenté ici au tableau III.

TABLEAU III

OBSERVATIONS SUR LA FORME :						
○ Anomalie de la courbe dérivée, se traduisant par une pente m plus faible, tendant vers 0. ○○ <i>Id.</i> suivie de réaccélération. φ Très forte anomalie (valeurs de m temporairement négatives), apparaissant comme une loi de Mc Vetty, suivie de réaccélération temporaire. X - m plus fort au début, baisse ensuite à la valeur indiquée. (N. B. : « <i>Id.</i> », dans la 2^e colonne, signifie qu'il s'agit de la même éprouvette.) La dénomination CD indique des éprouvettes, en métal A II, à mise en charge directe, assez brutale.						
N° éprov.	GRAIN en mm ² (ou traitement)	T° C	σ_0 kg/mm ²	m	a unités en ε : $3 \cdot 10^{-5}$ en t 1 mn	OBSERVATIONS sur la forme du fluage
A II 3	Bicristal (1 seul se déforme beaucoup)	34	1,11	0,30	31	Régulier (à part petits sauts pendant 50 h.)
23	Monocristal	29	0,686	(0,45)	0,5	Fluage dure 1 h seulement; peu précis.

TABLEAU III (suite)

N° éprouv.	GRAIN en mm ² (ou traitement)	T° C	σ_0 kg/mm ²	m	a unités en ε : $3 \cdot 10^{-5}$ en t 1 mn	OBSERVATIONS sur la forme du fluage
			0,860	0,47	1,75	<i>Très régulier</i> : reste parabolique de 10 mn à 200 h (allongement 0,5 %) lignes glissement (111) prédominantes, + 2 systèmes secondaires. 10 premières minutes: terme fortement ralenti.
	<i>Id.</i>	33	1,23	0,42	22	<i>Très régulier</i> : légèrement réaccélééré à la fin (+ $b t^2$), allongement 2,4 % (essais de variation de σ et T).
36	Monocristal	30	0,57			Allongement initial, 1,3 % par sauts. Au bout de 30 s, réaccélération ($v_0 \neq 0$).
37	Monocristal	30	0,910	(0,9 ?)		X - pendant 1 mn (allongement initial 0,8 %).
				0,34		ensuite, jusqu'aux rappels de plumes qui, à chaque fois, donnent de petits sauts puis arrêt temporaire.
	<i>Id.</i>	20	2,11	0,45		Au début (allongement initial 3,6 %); après, oscillations (variation T ?).
CD 18	Monocristal	20	2,56	0,28-0,23		Allongement initial 7 %; ensuite <i>régulier</i> ; m baisse peu à peu, puis réaccélération à la fin.
CD 24	Monocristal	20	2,30	1→0 →0,5		Irrégulier : $v = \text{cte}$ au début, puis oscillations ($m \rightarrow 0$, puis 0,5).
17	Monocristal	146	0,450	1→0,45	8,5	X - Début à vitesse constante, même un peu réaccélééré; ensuite parabolique (encore ralenti après 2 % d'allongement).
9	Monocristal	204	0,320			Arrêté au bout de quelques minutes, car trop rapide.
	<i>Id.</i>	204	0,274			Accélééré au départ ($v_0 \neq 0$), à cause de l'écrouissage préalable.

TABLEAU III (suite)

N° éprov.	GRAIN en mm ² (ou traitement)	T° C	σ_0 kg/mm ²	m	a unités en ε : $3 \cdot 10^{-5}$ en t 1 mn	OBSERVATIONS sur la forme du fluage
	<i>Id.</i> après fluage 2 % et recouvrance	204	0,278			$v_0 = 10^{-4}/h$ accéléré au début puis un peu ra- lenti en 18 h (2 % d'al- longement).
13	Bicristal (4 petits cristaux)	200	0,278	0,33	2,15	Baisse temporaire de m vers 10 h, 2 ^e terme + $b t^{1,75}$. On peut aussi dire que, vers 10 h m passe de 0,33 à 0,85 (+ $b t^{2,4}$).
14	Monocristal (+ qq. petits)	200	0,278	0,42	1,22	Au début; vers 2 h, réac- célation, puis ralen- tissement, $\rightarrow m^* = 0,7$
12	Très gros (2 à 24)	205	0,278	0,18	6,7	Réaccélération (en $t^{1,75}$), puis <i>ralentissement</i> dans les dernières 24 h (déformation hétéro- gène ?).
A II 34	5	25	2,50	0,29	470	Régulier ($\varepsilon_0 = 4$ %).
			3,20	0,42	1180	Régulier.
25	3	25	1,20			Ecrouisseage à la mise en charge.
38	3,15	30	0,800	0,31	0,35	Un peu irrégulier.
39	3,15	30	1,200	0,32	1,7	X - ($m = 0,8$ pendant une demi-heure).
40	3,8	30	1,600	0,38	4,85	X - puis m baisse à 0,2, puis 0,38.
41	2,6	30	2,000	0,42	6,5	X - puis m baisse à 0,2, puis 0,42.
43	2,8	30	2,500	0,41	15,8	X - ($m = 1$), puis baisse, puis 0,41.
42	2,6	30	3,000	0,30	210	Régulier ($\varepsilon_0 = 4,8$ %); m plutôt 0,37 au début.
52	1,4	29	0,600	0,14		X - (20 minutes).
53	3,7	27	0,450			$\varepsilon_0 = 0,32$ %, fluage im- possible à analyser.
	<i>Id.</i>	116	0,450	0,22		$\varepsilon_0 = 0,4$ %. Régulier.
54	3,4	117	0,600	0,37	3,5	Réaccélééré après 24 h. $\varepsilon_0 = 0,44$ %, passe à $m = 0,63$, ou bien ter- me + $b t^{1,2}$
57	0,75	116	0,800	0,45		$\varepsilon_0 = 0,5$ % petits sauts au début.
55	1,35	160	0,600	0,67		Régulier ($\varepsilon_0 = 0,23$ %).
6	1	175	0,800	0,55	36	Régulier (1 mn-2 h.).
48	1,5	202	0,200	0,635	0,43	Régulier.
	<i>Id.</i>	202	0,300	0,75		Régulier.
	<i>Id.</i>	202	0,350	0,72		Très régulier.

TABLEAU III (suite)

N° éprov.	GRAIN en mm ² (ou traitement)	T° C	σ_0 kg/mm ²	m	a unités en ε : $3 \cdot 15^{-5}$ en t : 1 mn	OBSERVATIONS sur la forme du fluage
44	1,65	204	0,300	0,24	0,94	Passé ensuite à $m = 1,8$, puis début de ralentissement (cf. A II, 12).
47	1,6	203	0,350	0,62	2,08	X - ($m = 0,75$).
45	1,7	203	0,500	0,405	31,5	$\varepsilon_0 = 0,11$ %. Régulier
46	1,7	203	0,700	0,49	73,2	$\varepsilon_0 = 0,5$ %. Très régulier.
A I 3	0,25 (450°)	35	1,25	0,36	2,25	ϕ .
1	0,25 (450°)	35	1,68	0,42	2,55	ϕ .
A II 20	0,1 (450°)	32	1,50	0,388	2,2	$\varepsilon_0 = 1,25$ %. Régulier,
bis						+ $b t^{1,6}$.
21 bis	0,1 (450°)	28	0,600	(0,3)	0,24	ϕ (0,3 : valeur de m tout au début).
	Id.	28	0,800	0,37	0,31	ϕ à la fin.
	Id.	28	0,992	0,41	0,4	$\phi\phi$ (vers 10 h).
	Id.	28	1,258	0,325	1,5	Sensiblement régulier (quelques sauts).
			1,500	0,36	2,5	Début logarithmique.
CD 8	0,07 (400°)	20	2,530	0,31		Légères oscillations.
A I 2	0,25 (450°)	150	0,48	0,8	0,02	Passé à terme accéléré en $t^{1,25}$ ou bien $\varepsilon =$ $\varepsilon_0 - 1,25 e^{-0,012 t} +$ $0,004 t^{1,3}$.
A II 19	0,1	151	0,45	0,7	0,45	Puis passe peu à peu à $m = 0,33$, $a = 9,2$.
A II 11	0,07	204	0,694	0,64	13	Régulier $\varepsilon_0 = 0,07$ %, puis fluage rapide (2,5 % en 8 h).
24	0,08 (450°)	210	0,980	0,55	100	Tout au début (10-60 s) $m \neq 0,1$, puis régulier ($\varepsilon_0 = 0,5$ %. A % = 3,8 %) (sans réaccélé- ration).
	Id. après re- couvr. 100 h	210	1,0	0,59	50	
	Id. après re- couvrance	210	1,04	(1)		Sensiblement linéaire.
10 bis	0,08 (450°)	205	0,278	0,17		Assez régulier (variations de T ?).
(15 bis)	(400°)	201	0,278	0,4		Irrégulier.
20	0,01 + quel- ques longs (300°)	27	1,250	0,4		
	Id. après long. recou- vrance	26	0,880	0,46	0,08	ϕ (vers 5 h).
	Id.	26	0,967	0,44	0,11	$\phi\phi$ id.
	Id.	26	1,048	0,45	0,17	$\phi\phi$ id.
21	0,01 + qq. longs (300°)	28	0,600	0,45	0,15	ϕ ($m = 0,45$ tout au début)
			0,800	0,4	0,22	$\phi\phi$
			0,992	0,35	0,55	Régulière.

TABLEAU III (suite)

N° éprov.	GRAIN en mm ² (ou traitement)	T° C	σ_0 kg/mm ²	m	a unités en ε : $3 \cdot 10^{-5}$ en t 1 mn	OBSERVATIONS sur la forme du fluage
27	recuit 310° allongée 15 % sous 4,2 kg/mm ² et recuit 315°	28	3,840	0,81		○○ (léger) structure sans doute polygonisée fi- nement.
29	0,06 + quel- ques longs (320°)	30	3,900	0,32		Régulier; tout au début, logarithmique (30 s).
30	0,04 + quel- longs (290°)	28	3,950	0,335	506	Régulier ($\varepsilon_0 = 6,5$ %)
33	Id.	28	4,100	0,39	1 280	Régulier ($\varepsilon_0 = 12$ %) + $b t^{2,6}$.
31	Id.	28	4,250	0,40	1 050	Régulier ($\varepsilon_0 = 10$ %) + $b t^{1,8}$.
32	Id.	28	4,500	0,46	2 600	Régulier ($\varepsilon_0 = 15$ %) + $b t^3$.
CD 14	0,03 (315°)	20	3,800	0,34	479	X - (début linéaire, $m = 1$), + $b t^{1,5}$ — A % = 36 %.
CD 17	Id.	20	3,950	0,30	1 000	X - (id.) A = 15 + (ar- rêté avant réaccélération.)
CD 16	Id.	20	4,265	0,39	1 700	X - (id. - plus accentué).
CD 15	Id.	20	4,500	0,36	2 330	Régulier, réaccélération rapide.
A II 4	0,01 (300°)	88	1,080	0,35	5,4	Croît entre 1-2 h jusqu'à $m = 0,6$.
	Id. après re- couvrance 72 h	88	1,080	0,61	1,0	Régulier avec légères os- cillations (de 5 mn à 120 h).
	Id. après re- couvr. 24 h	88	1,080	0,73	0,15	Très régulier.
2	0,01 (300°)	100	0,915	(0,68)		$\phi : \varepsilon = \varepsilon_0 - 5 e^{-0,7 t} + 0,2$ $t^{0,68}$; de 44 à 716 h : parabolique ($m = 0,68$) sans réaccélération.
16	0,005 (300°)	152	0,456	0,58	0,24	Régulier (choc $\rightarrow$ léger ralentissement avec m passant à 0,51). Encore ralenti après 400 h.
10	0,006 (300°)	206	0,278	0,41	0,74	Régulier avec 2° terme : + $b t$ ou passage de $m = 0,41$ à $m = 0,82$.
15	0,04 (tordu; recuit 300°)	197	0,278	0,26	1,85	Irrégulier, passe à $m =$ 0,6; + $b t^{2,5}$.
22	écroui (brut)	26	6,0	0,345	1,17	Très régulier (de 5 mn à 24 h)
	Id.	97	1,0 2,0	0,41 0,37		(Régulier) ○ à la fin. (Régulier) après 10 h, m passe à 0,55. + $b t^{1,7}$.
22 bis	recuit (par- tiel) à 245°	100	2,000	0,47		

TABLEAU III (suite)

N° éprouv.	GRAIN traitement) en mm ² (ou	T° C	σ_0 kg/mm ²	m	a unités en ε : $3 \cdot 15^{-5}$ en t : 1 mn	OBSERVATIONS sur la forme du fluage
	(0,003) <i>Id.</i>		3,000	0,6		+ terme accéléré - recou- vrance $24 \cdot 15^{-5}$ en 24 h, après allongement de fluage 1 %.
A IV 1	16 h à 430°	100	2,000	0,23	19,3	<i>Très régulier.</i>
2	écrouie (brute)	207	0,380	0,3		Irrégulier, sauts au dé- but. (Portevin-Le Châ- telier) (?).
3	<i>Id.</i>	298	0,600	0,37	1,55	<i>Régulier.</i> Réaccélééré at- teint v. stationnaire.
4	2 h 1/2 500°	240	0,600	(0,38)		Imprécis (fluage faible, T pas fixe).
A V 1	16 h 430°	100	2,000	0,21	20	<i>Régulier.</i>
A VI 1	1/2 h 300°	100	de 2,5 à 4,5 recouv.	0,27		Recouvrance parabolique 10 h puis $\rightarrow$ log.
2	1/2 à 300°	100	5,500 recouv.	0,28 0,25	3,8	<i>Très régulier</i> pendant 7 h env., puis $\rightarrow$ log.
	<i>Id.</i> après recouvrance 100 h	100	5,500	0,29	2,0	<i>Très régulier.</i>
	<i>Id.</i> après recouvrance 30 h	100	5,500	0,28	3,5	<i>Très régulier.</i>
	Recuit 16 h 440°	102	2,010	0,19		Pas très régulier.
	<i>Id.</i> après recouvrance 30 h	102	2,350	0,24	6,3	<i>Très régulier.</i>
	<i>Id.</i> après recouvrance 3 h	101	2,850	0,28	6,2	(Régulier).
	<i>Id.</i> après recouvrance 50 h	101	2,850	0,44	0,8	<i>Très régulier.</i>
	<i>Id.</i> après all. rapide 1,5 % et recouvran- ce 40 h	101	2,850	0,22	1,6	Assez régulier.
	<i>Id.</i> après all. rapide 0,4 % et recouvran- ce 20 h	101	3,350	0,33	2,6	<i>Régulier.</i>
	<i>Id.</i> après recouvrance 24 h	101	3,350	0,24	3,6	○ ○ (léger).
3	16 h 440°	100	2,600	0,28	14	Régulier.

L'examen des indications portées sur ce tableau permet de dégager certaines lois de fluage de l'aluminium.

En général, la loi parabolique à 1 ou 2 termes (formules [2] et [8]) représente bien la forme des courbes; le deuxième terme, réaccélééré, ne se manifeste à l'ambiante qu'aux très fortes charges (éprouvette n° A II, 29 à 32, et CD, 14 à 17), ou pour des charges plus faibles à plus haute température (par exemple A II 22 bis à 100°; A I 2 à 150° et plusieurs éprouvettes à 200°). Mais même à des températures plus élevées, on peut observer d'importants allongements de fluage sans tendance à la réaccélération (A II n° 2 à 100°; n° 16 à 150°, n° 24 à 210°). Les monocristaux, à l'ambiante, présentent également des fluages importants sans réaccélération.

températures les plus élevées, vers 300° (A IV 3; encore s'agit-il d'un métal écroui); l'exposant m est compris entre 0,19 et 0,29 à 100°, et croît un peu quand la température s'élève (A IV n°s 2, 3 et 4). On peut dire que le comportement rhéologique de l'aluminium impur, comportant notamment des précipités, est plus régulier que celui de l'aluminium raffiné, dont nous allons maintenant examiner les particularités :

1° Eprouvettes monocristallines (ou avec un petit nombre de très gros grains).

Les monocristaux, sous les charges utilisées pour les faire fluier à l'ambiante, sont très sensibles aux chocs et se déforment parfois spontanément par sauts, suivis de périodes de fluage fortement ralenti, qui se réaccélère peu à peu (éprouvette A II 36, 37). Ces sauts cor-

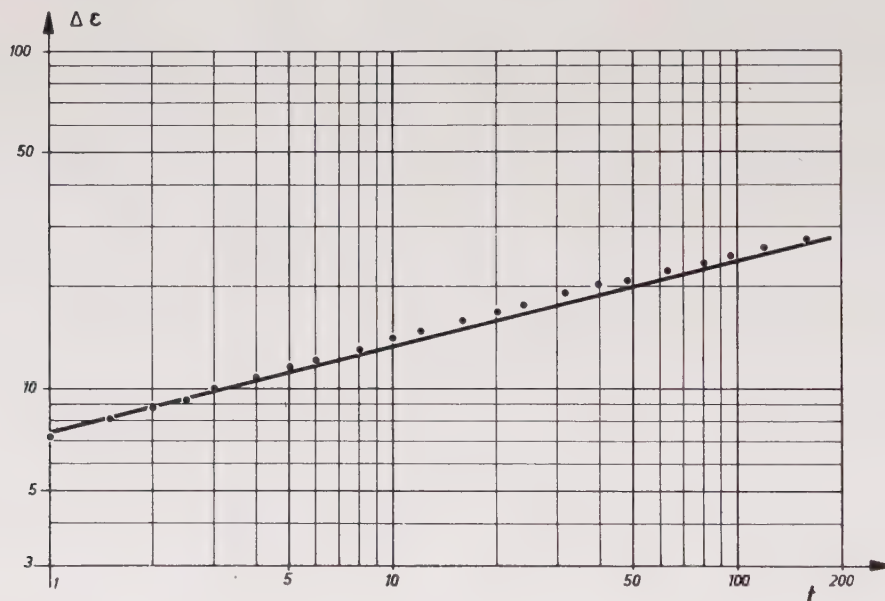


FIG. 7

Analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de fluage d'un aluminium impur (A IV), à 100 °C sous 2,350 kg/mm². Anamorphose double logarithmique; unités arbitraires.

De nombreuses éprouvettes présentent cependant des anomalies, ou écarts à la loi parabolique. Nous les décrirons plus en détail dans la suite; mais remarquons dès maintenant que ces irrégularités sont absentes dans le cas des aluminums impurs (A IV, A V et A VI). Pour ces aluminums, les courbes de fluage sont très régulièrement paraboliques (fig. 7) sans second terme réaccélééré, sauf aux

respondent à des avalanches de glissement sur toute l'éprouvette³¹, et sont suivis d'une longue période « d'incubation ». La même « incubation » s'observe d'ailleurs à 200° si on écrouit le métal par une déformation initiale trop forte (A II 9); au cours de cette période, le métal se restaure et retrouve sa capacité de fluier (fluage accéléré pendant un certain temps).

En dehors de ces courbes avec sauts, on arrive assez souvent à obtenir à l'ambiante sur les monocristaux une courbe régulière. Dans ce cas, elle est bien parabolique, avec un exposant m compris entre 0,3 et 0,5; la figure 8

A 200°, des éprouvettes monocristallines (ou à très gros grains occupant toute la section) ont au fluage un comportement un peu irrégulier : les courbes présentent un début parabolique ($m = 0,33 - 0,42$), suivi d'une

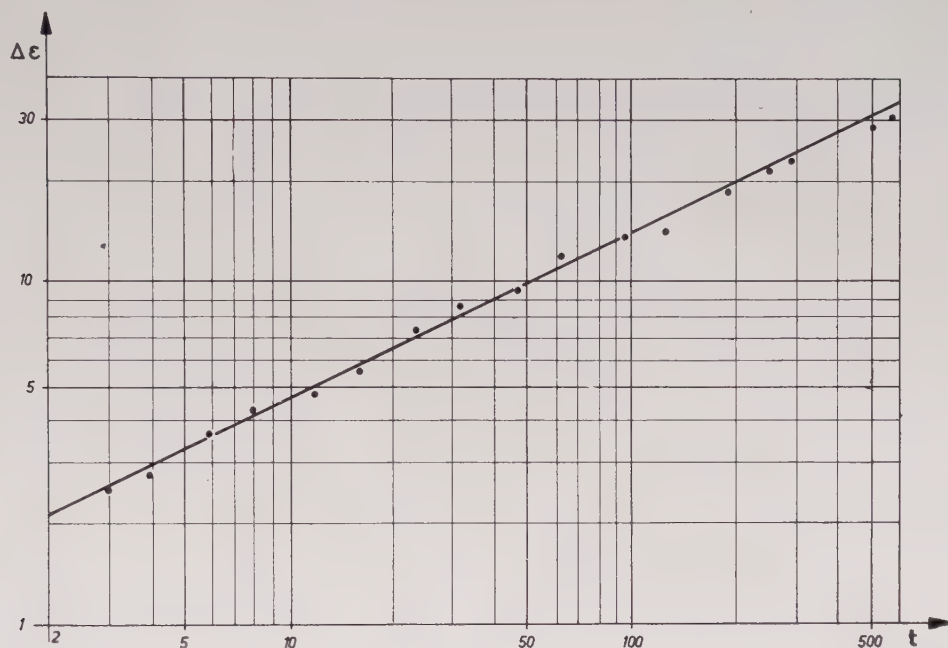


FIG. 8

Analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de fluage d'un monocristal d'aluminium raffiné (A II 23), à 29°C sous 860 g/mm². Anamorphose double logarithmique; unités arbitraires.

représente l'analyse différentielle d'une de ces courbes. Toutefois, aux plus fortes charges (par exemple 2,5 kg/mm², A II CD 18, présentant à la mise en charge un allongement considérable, $\epsilon_0 = 7\%$), la loi de fluage reste parabolique, mais avec un exposant plus faible ($m = 0,23$ par exemple).

Une mise en charge trop rapide donne un début de courbe sensiblement linéaire (CD 24); cette portion doit avoir son origine dans une sorte de compensation entre la réaccélération après incubation signalée plus haut et la tendance normale au ralentissement; elle semble correspondre à une vitesse critique³¹. Cette portion linéaire disparaît cependant aux charges les plus élevées (CD 18).

A 150°, un seul monocristal a été essayé; après un début linéaire, analogue à ceux décrits au paragraphe précédent, le fluage devient très régulièrement parabolique ($m = 0,45$).

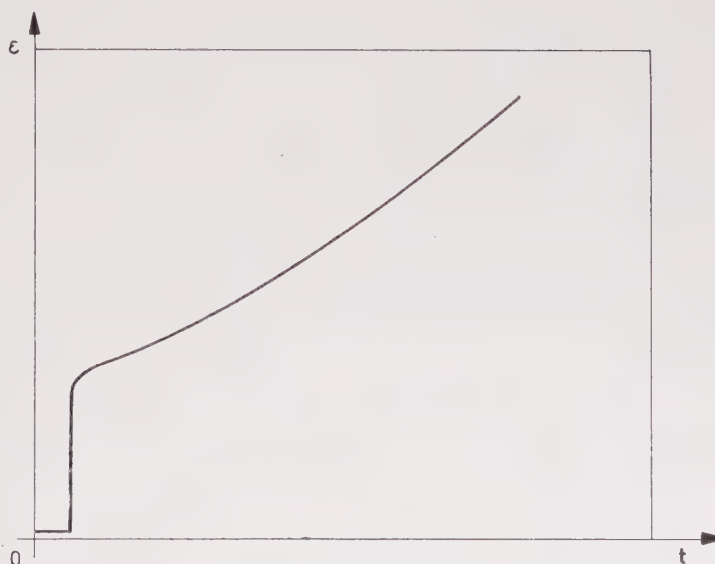


FIG. 9

Courbe de fluage d'un monocristal d'aluminium raffiné à 204 °C, sous 278 g/mm². Fluage initial accéléré.

période d'instabilité (réaccélération précédée parfois d'un léger ralentissement) au cours de laquelle on peut dire qu'une portion importante correspond à un fluage parabolique peu ralenti* ($m = 0,7$ à $0,85$, valeur que l'on retrouve également sur un essai de fluage effectué à 300° sur des éprouvettes plates à très gros grains¹³). A cette température, les systèmes de glissements actifs sont multiples, et souvent anormaux (c'est-à-dire différents des glissements (111) observés à l'ambiante); quelques-uns de ces systèmes sont indiqués au tableau IV. La figure 9 représente une courbe de fluage de monocristal à 200° , où cette instabilité est particulièrement visible.

TABLEAU IV

EPROUVETTE	T °C	σ_0 kg/mm ²	SYSTÈMES DE GLISSEMENT
A II 14	200	0,278	Systèmes (113), (115) et (133)
A II 9	Id.	Id.	4 systèmes (110)
A II 13	Id.	Id.	1 système (111)

2° Epreuves polycristallines.

A l'ambiante et aux charges faibles, les courbes de l'aluminium raffiné ne sont pas régulièrement paraboliques au début; par rapport à la loi parabolique, elles peuvent présenter différentes sortes d'anomalies.

— Pour les éprouvettes à gros grains, sous des contraintes assez fortes mais ne dépassant pas $2,5$ kg/mm² (A II 39, 40, 41 et 43) et pour les éprouvettes à grain fin sous forte charge appliquée rapidement (CD 14, 17, 16), le début correspondant à un exposant m anormalement fort, parfois égal à 1 (portion linéaire); puis on passe graduellement à une courbe parabolique à exposant m plus faible et voisin de 0,3-0,4, avec parfois un ralentissement temporaire encore plus marqué. Cet aspect rappelle celui signalé plus haut pour les monocristaux, à charge moyenne (CD 24).

— Pour d'autres éprouvettes, l'anomalie revêt un aspect différent: sur la courbe différentielle, m subit une baisse temporaire, suivie (pas toujours) d'une nouvelle croissance; parfois la courbe reprend ensuite le prolongement de la portion précédant l'anomalie. Parfois cette anomalie est si accentuée que m prend

temporairement des valeurs négatives (fig. 10); on peut dans ce cas représenter la courbe par une formule du genre:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - a e^{-\lambda t} + c t^m \quad [38]$$

qui ressemble à la loi [6] proposée par Mc Vetty³³.

Toujours à l'ambiante, mais aux charges fortes, on obtient des courbes paraboliques régulières. C'est le cas sous $2,5$ kg/mm² pour une éprouvette à très gros grain (A II 34), sous $3,0$ kg/mm² pour une éprouvette à grain de 2 mm² (A II 42) et pour des contraintes

supérieures à $3,9$ kg/mm² pour des grains fins de $0,1$ mm² environ (A II 29, 32 et CD 15). On remarquera que, dans tous les cas, l'allongement à la mise en charge est important ($\varepsilon_0 \geq 4\%$); une structure assez fortement écrouie, telle qu'en produisent des allongements de cet ordre, semble présenter un comportement rhéologique régulier, avec fluage parabolique. C'est ce que confirme le cas d'une éprouvette *brute de tréfilage* (A II 22), qui, à l'ambiante comme à 100° , présente des courbes de fluage très régulières, restant parabolique par exemple dans un intervalle de temps allant de 5 mn à 24 h.

A l'ambiante, les valeurs de m observées sont comprises entre 0,29 et 0,46, avec deux exceptions: une éprouvette sous charge très faible (A II 52) qui donne $m = 0,14$ et une éprouvette à structure écrouie et restaurée (ou polygonisée) qui donne $m = 0,81$. Dans certains cas, m croît avec la charge; c'est ce qu'on remarque dans les séries d'éprouvettes identiques, telles que A II 38 à 43, ou 30 à 33. Mais, en réalité, cette croissance n'est pas régulière: dans le domaine des charges faibles, où la courbe présente des anomalies, m croît avec la charge, avec une certaine dispersion; quand la charge dépasse une certaine valeur, au-dessus de laquelle, comme nous l'avons dit, la courbe devient régulière (fort allongement initial) m baisse assez brusquement (comparer A II 43 et 42, A II 20 et A II 29 ou 30,

* Il est d'ailleurs difficile de distinguer une croissance progressive de m de la superposition d'un terme accéléré ($+ b t^n$, $n > 1$), cette seconde interprétation est également possible ici dans certains cas.

mais aussi A II 21 bis sous 0,992 et 1,258 kg/mm²).

Quant au coefficient a , qui caractérise (à m constant) la rapidité du fluage, il varie comme $\sigma_0^{3,3}$ dans la série A II 38, 39, 40, 41, 43, pour croître beaucoup plus vite quand on passe au type de déformation sous charges fortes (A II 42, ou bien séries A II 30 à 32 ou CD 14 à 17, où a croît comme σ_0^{10} environ).

0,37-0,41, A II 54 à 120° et A II 10 à 200°) et la réaccélération qui suit est moins marquée, conduisant simplement à des valeurs de m fortes, mais inférieures à 1 (0,6 à 0,8) *. On remarque que ce comportement ressemble à celui des monocristaux;

— aux charges les plus fortes, on retrouve un fluage parabolique régulier, avec m compris entre 0,4 et 0,67 (tendance à se grouper

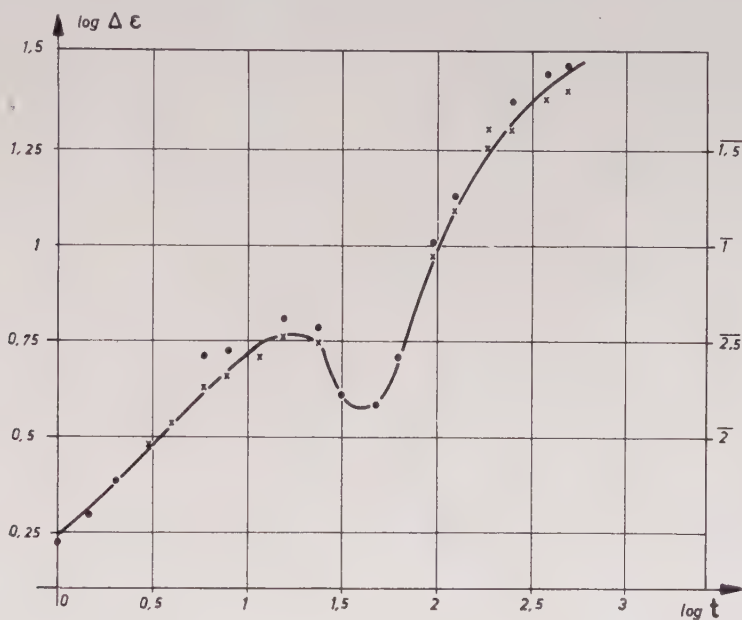


FIG. 10

Analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de fluage d'aluminium raffiné (A II 1) polycristallin, à 35°C sous 1,68 kg/mm². Anamorphose double logarithmique; unités arbitraires.

Aux températures plus élevées, le comportement de l'aluminium raffiné, polycristallin, est assez particulier :

— aux charges les plus faibles, la courbe de fluage est parabolique régulière, avec un exposant fort ($m = 0,63$ pour A II 48 à 200° sous 0,200 kg/mm²);

— aux charges intermédiaires, on observe des anomalies : soit à 150°, début avec m fort (0,7-0,8), puis ralentissement temporaire, suivi de réaccélération (A I 2 et A II 19; cette anomalie est absente pour les grains très fins, comme A II 16), soit, le plus souvent, un début avec une valeur de m anormalement faible (0,17 à 0,26-A II 53 à 120°; A II 12, 44, 10 bis et 15 à 200°), suivi d'une réaccélération, en général temporaire; parfois le début du fluage a un exposant m plus normal (par exemple

autour de 0,5); la figure II en donne un exemple.

Le coefficient a varie comme $\sigma_0^{4,2}$ (A II 44 à 48).

3° Recouvrance.

La recouvrance, ou raccourcissement progressif de l'éprouvette après décharge, est faible dans le cas de l'aluminium raffiné. A chaud (200°) elle est nulle pour les monocristaux; pour les éprouvettes polycristallines, elle ne dépasse pas $5 \cdot 10^{-5}$ en un jour (grain

* L'interprétation des courbes est d'ailleurs un peu douteuse, car on peut aussi bien traduire l'incurvation de la courbe dérivée par un passage de m à une valeur plus forte ou par la superposition d'un terme accéléré, comme dans la formule [8].

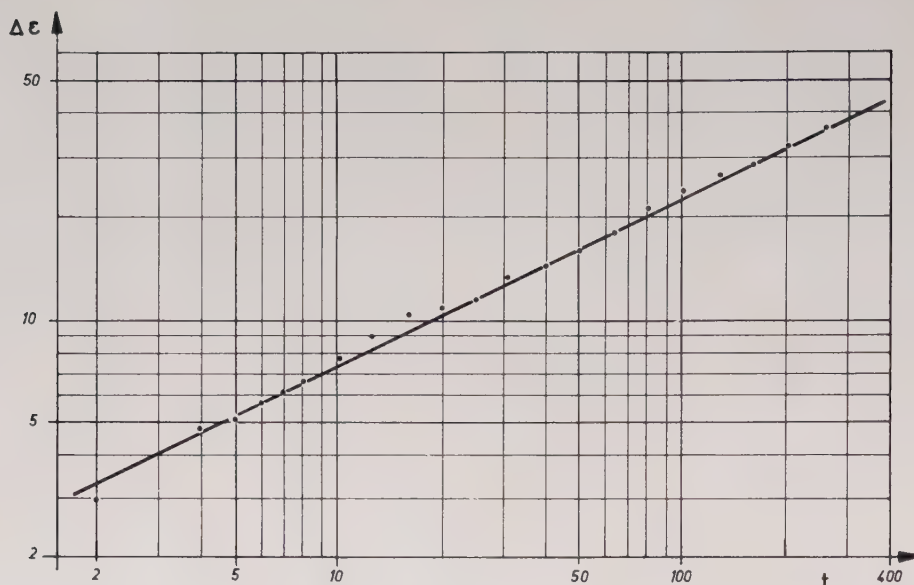


FIG. 11

Analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de fluage d'un aluminium raffiné (A II 6) polycristallin, à 203 °C sous 700 g/mm². Anamorphose double logarithmique; unités arbitraires.

0,01 mm²). Aux températures plus basses, voisines de l'ambiante, on observe pour les monocristaux une recouvrance nulle ou faible ($7,3 \cdot 10^{-5}$ en un jour dans un cas exceptionnel); pour les polycristaux, elle est en général faible ($2,5$ à $3 \cdot 10^{-5}$ en un jour, dans beaucoup de cas), mais atteint parfois des valeurs 8 fois plus fortes pour une éprouvette à grain exceptionnellement fin (A II 22 bis, peut-être s'agit-il d'une éprouvette simplement restaurée ou finement polygonisée; un cliché de rayons X donne des anneaux très finement ponctués).

Ces recouvrances sont trop faibles pour qu'on puisse analyser la forme de la courbe correspondante.

Pour les *aluminiums impurs*, par contre, la recouvrance est plus forte et peut atteindre $53 \cdot 10^{-5}$ en un jour (A VI 2). On peut analyser les courbes de recouvrance correspondantes; au début (7 à 10 h) elles sont *paraboliques*, de la forme

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - a't^{m'} \quad (m' = 0,25 - 0,27) \quad [39]$$

ensuite la vitesse de recouvrance se ralentit plus vite que ne l'indiquerait cette loi parabolique.

4° Observations diverses.

Energie d'activation.

Une petite variation de température permet de calculer l'énergie d'activation du processus élémentaire contrôlant la vitesse de fluage. Dans la machine T. R., l'inertie thermique du four ne permet pas une variation rapide de température; il faut près d'une demi-heure pour établir l'équilibre. Mais si l'on se trouve dans un endroit où la vitesse de fluage est sensiblement stationnaire, on peut ainsi extrapoler les courbes avec assez de sûreté. C'est ce que nous avons fait sur un monocristal (A II 23) fluant à 33°; une baisse de température de 33 à 27° réduit la vitesse (au bout d'une heure) dans le rapport de 2,78 à 1, ce qui correspond à une énergie d'activation de 30.000 cal/mole.

Dans ce même état, quasi stationnaire, une surcharge de 3 % multiplie la vitesse par 3,6.

On peut aussi calculer l'énergie d'activation du fluage en comparant les courbes de fluage de deux éprouvettes identiques obtenues sous même charge et à deux températures T_1 et T_2 . Il faut, pour que cette comparaison ait un sens, que les deux courbes aient même forme, donc même exposant m . En appelant a_1 et a_2

les coefficients respectifs des courbes à T_1 et T_2 , on peut dire qu'on atteint des allongements de fluage égaux au bout des temps t_1 et t_2 , tels que $a_1 t_1^m = a_2 t_2^m$. On en déduit que les vitesses de fluage respectives sont, à tout instant, dans le rapport $\frac{a_2}{a_1}^{1/m}$, ce qui permet de calculer une énergie d'activation.

Il est malheureusement très difficile de trouver des couples de courbes remplissant ces conditions. On peut comparer la série A II 38 à 43, extrapolée à 600 g/mm² (ce qui donne $a = 0,12$) à 30°, avec A II 54 à 117°, d'où l'on tire une énergie d'activation de 28.000 cal/mole. Etant donné la dispersion d'une éprouvette à l'autre et l'incertitude des extrapolations, ces résultats sont satisfaisants et confirment qu'à l'ambiante et un peu au-dessous, l'énergie d'activation du fluage primaire est voisin de 30.000 cal/mole. Pour des températures plus élevées, on peut comparer A II 45 à 47 jusqu'à 800 g/mm² (à 203°). On trouve ainsi une énergie d'activation d'environ 37.000 cal/mole, valeur voisine de celle trouvée par Dorn.

Effet d'une surcharge.

A haute température (100 à 200°) sur une éprouvette ayant subi un petit fluage sous une certaine charge, un nouveau fluage à même température, mais sous charge nettement plus forte donne en général une courbe régulièrement parabolique, même si l'on se trouve dans un domaine de contraintes où, en appliquant la même charge d'un seul coup, la courbe présenterait des anomalies.

Pour ce second fluage, on obtient un exposant m anormalement fort (voir par exemple A II 48 et 22 bis).

Un effet analogue s'observe si, après le premier fluage, on applique non pas une charge supérieure, mais la même charge, à condition de laisser entre les deux essais l'éprouvette subir une recouvrance prolongée (A II 24 et 4). Il est d'ailleurs assez remarquable qu'un repos à température peu élevée, ou même à l'ambiante, renouvelle la possibilité de fluage primaire d'une éprouvette.

Influence de la grosseur du grain; « équicohésion ».

Aux basses températures, aluminium flue d'autant plus vite (à charge et température donnée) que le grain est plus gros.

A haute température ($\geq 200^\circ$) il n'en est plus de même. Certains auteurs avaient cru démontrer qu'au-dessus d'une certaine température, dite « température d'équicohésion », les éprouvettes fluent d'autant plus vite que le grain est plus fin. En réalité, la situation est plus complexe. Quand on mesure les vitesses stationnaires de fluage (ou sensiblement stationnaires) obtenues au bout d'un certain temps à 200° sous 0,278 kg/mm² sur une série d'éprouvettes présentant des grosseurs de grains variées (allant du monocristal à un grain de 0,006 mm² : A II 9, 13, 14, 12, 10, 15, 10 bis, 15 bis), on obtient une courbe passant par un minimum, comme le montre la figure 12. On peut dire que, partant du monocristal qui flue facilement, l'introduction de quelques joints durcit le métal; mais on introduit en même temps un mécanisme de fluage supplémentaire, qui se fait sentir seulement à petites distances des joints, et favorise donc le fluage du métal à grain très fin.

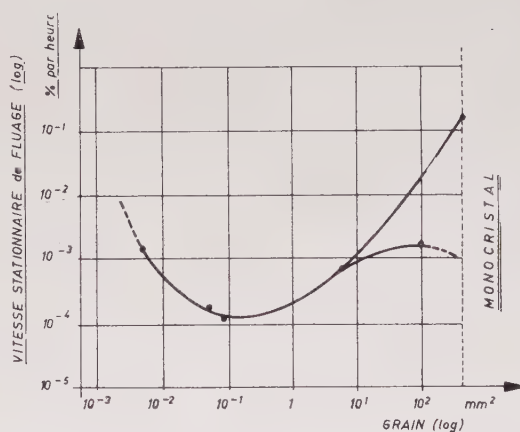


FIG. 12

Relation entre la vitesse stationnaire de fluage et la grosseur de grain (A II) à 200 °C sous 278 g/mm².

Il n'y a donc pas de « température d'équicohésion » bien définie, et la dénomination même d'équicohésion est trompeuse : les fluages intracristallins et intergranulaires ne sont pas purement additifs ou compétitifs, mais réagissent l'un sur l'autre.

Il faut d'ailleurs remarquer que malheureusement les éprouvettes utilisées ne diffèrent pas uniquement par la grosseur de grain. La perfection même des cristaux qui les composent doit varier d'un cas à l'autre; bien que les rayons X indiquent que dans toutes les éprouvettes, la recristallisation était complète, il doit y avoir plus de défauts de structure (dislocations par exemple) dans les éprouvettes

à grains fins, recuites à température peu élevée après fort écrouissage, que dans les éprouvettes à très gros grains, ayant subi un recuit poussé.

Forme exacte du début des courbes de fluage.

Dans quelques essais sous forte charge, où le fluage est très rapide dans les premiers instants, on a pu enregistrer ce fluage par des pointés directs, sans avoir recours aux dispositifs enregistreurs trop lents. On observe souvent, dans ce cas, que les premiers instants du fluage, disons les premières minutes, ne suivent pas la loi parabolique que l'on observe ensuite; la loi suivie est plus rapidement freinée et semble logarithmique ou hyperbolique pendant quelques instants (A II 23 sous 860 g/mm², A II 24 à la première charge, A II 21 bis sous 1,500 kg/mm², A II 29, etc., etc...). La figure 13, par exemple, illustre le cas de l'éprouvette A II 21 bis : alors que l'allongement élastique théorique serait de $22,5 \cdot 10^{-5}$, le point A ($\varepsilon = 43 \cdot 10^{-5}$) représente le premier point qu'on ait pu enregistrer au vol. Le fluage, après cela, se ralentit très vite, puis rattrape après une dizaine de minutes une loi parabolique qui, si on l'extrapole à rebours (CB), devrait avoir son origine en B, d'ordonnée $61 \cdot 10^{-5}$.

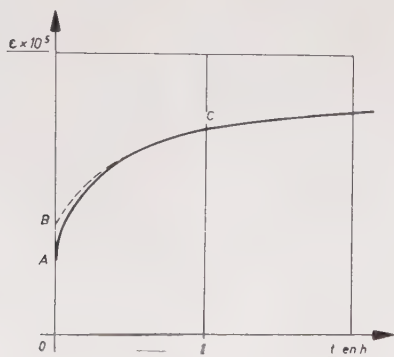


FIG. 13

Forme exacte du début de fluage d'une éprouvette polycristalline d'aluminium raffiné à 28° sous 1,5 kg/mm².

On peut interpréter ce début de fluage en supposant qu'au terme parabolique ordinaire (BC) se superpose un terme rapidement amorti, représentant l'écart entre les courbes BC et AC et dont la forme exacte est difficile à déterminer (hyperbolique); la portion apparemment logarithmique résulterait de cette superposition.

Le même phénomène se manifeste à haute température (A II 24), où il est particulièrement net, mais dure un peu moins d'une minute.

Dans le cas de l'éprouvette A II 21 bis, on remarque qu'à la décharge, le raccourcissement instantané est $53 \cdot 10^{-5}$, soit un peu plus du double du raccourcissement élastique (effet Bauschinger); il est le même quand on décharge après 5 heures ou après 82 heures de fluage.

5° Remarques générales sur le fluage de l'aluminium.

On obtient des courbes de fluage régulièrement paraboliques :

— pour les monocristaux (sauf s'il y a des « sauts » sur la courbe);

— pour les polycristaux d'aluminium raffiné, à charge suffisamment élevée pour que l'on dépasse à la mise en charge le « point de transition » des courbes de traction⁴⁰ et que le métal soit ainsi dès le début fragmenté en sous-grains (et cela, aussi bien à l'ambiante qu'à 100 ou 200°);

— pour les polycristaux d'aluminium impurs;

— dans une éprouvette d'aluminium raffiné polycristallin fluant à 200° sous très faible charge (200 g/mm²).

Les courbes de fluage des éprouvettes polycristallines d'aluminium raffiné, à charge peu élevée, présentent une anomalie. Cette anomalie semble apparaître plus tôt sur la courbe à 88° qu'à 30°, ce qui suggère qu'elle est due à un processus activé.

On peut traduire ces observations en disant :

— que le fluage d'un cristal est parabolique quand il n'est pas perturbé;

— que la présence de joints crée des perturbations qui provoquent des anomalies dans les courbes de fluage;

— que lorsque la structure est très divisée (soit par des impuretés ou précipités, soit par une fragmentation à la mise en charge) de telle façon que le libre parcours des dislocations soit petit vis-à-vis de la taille des grains, le fluage est de nouveau régulièrement parabolique.

Les valeurs de l'exposant m de la loi parabolique sont intéressantes à examiner :

— pour les aluminums impurs, vers 100°, elles sont voisines de 0,25;

— pour les monocristaux à l'ambiante, m est compris entre 0,3 et 0,5 (sauf un cas où $m \approx 0,25$ sous très forte charge, 2,56 kg/mm²);

— pour les polycristaux sous forte charge, m est voisin de 0,35 à l'ambiante et de 0,5 à 150-200°.

Dans l'ensemble, m croît avec la température.

Avec la charge, la variation est plus complexe : pour les monocristaux à l'ambiante, les variations de m sont irrégulières, avec une tendance à la baisse quand la charge croît; cette baisse est particulièrement nette pour l'éprouvette CD 18. Pour les polycristaux à l'ambiante, au début m croît plutôt avec la charge (série A II 38 à 43), mais dans un domaine où les courbes présentent une « anomalie », en sorte que les valeurs de m sont peu significatives; aux plus fortes charges, où la parabole devient régulière, m baisse.

A haute température (200°), aux charges insuffisamment élevées pour atteindre d'emblée un fluage parabolique régulier, on observe sur les éprouvettes polycristallines une anomalie consistant en un fluage débutant avec une valeur faible de m , en général de l'ordre de 0,2, qui croît progressivement pour atteindre des valeurs de l'ordre de 0,6-0,8, ou même une réaccélération, dont on est sûr dans certains cas qu'elle n'est que temporaire.

Sur les éprouvettes monocristallines, on observe aussi une certaine instabilité avec réaccélération temporaire (voir figure 9), mais pas de valeurs très faibles de m au début; celles-ci doivent donc être dues à la présence des joints intergranulaires.

B) Zinc

Le tableau V rassemble les résultats de l'analyse différentielle d'un certain nombre de courbes de fluage obtenues sur du zinc pur à 99,99 % en général à l'état polycristallin.

TABLEAU V

GRAIN (mm ²)	σ_0 (g/mm ²)	T °C	m	OBSERVATIONS	VITESSE stationnaire 10 %/h
0,19 (rec. 3 h 295°)	600	30	0,19	Irrégulier	
0,19	1 200	30	(0,2-0,36)	Irrégulier	
0,19	1 600	30	0,37		
0,19	2 000	30	0,40		
0,19	2 400	30	0,44		
0,19	2 600	30	0,50		
0,19	2 800	30	0,515		
0,19	3 430	30	0,5		
1,5	802	30	0,33		
Id.	963	30	0,52		
Id.	1 123	30	0,49		
Id.	1 926	30	0,45		
1,2	2 000	30	0,395		
tricristal dont 1 grand)	165	30	0,22	Irrégulier décro- chements	
1,5	500	95	0,42		8,7
0,13	500	95	0,35		0,15
0,012	500	95	0,48	pendant 1 h;	
			0,73	de 1 à 50 h	1,6
0,012	4 000	95	0,54		
0,01	476	158	0,5	+ b t ^{1,93}	1,1
Id.	555	158	0,78	+ b t ^{1,61}	1,8
0,01	600	158	0,65	+ b t ^{1,62}	
0,05	500	158	0,78	+ b t ^{1,97}	
0,01	715	158	0,83	+ b t ^{1,62}	3,2

En dehors de trois cas où le fluage primaire est un peu irrégulier, quoique en gros parabolique (fluages faibles à 30° et cas du grand cristal), le début des courbes de fluage comporte une portion bien parabolique s'étendant sur une longue durée (parfois 50 heures ou plus) lorsque la température ne dépasse pas 150° . Les exposants m correspondants s'échelonnent entre 0,33 et 0,78 avec une tendance générale à croître avec la température.

En outre, en surchargeant une même éprouvette après un fluage appréciable, on obtient une nouvelle courbe parabolique, mais avec un exposant anormalement fort. C'est ce que montrent la deuxième série à 30° (grain $1,5 \text{ mm}^2$) et la première série à 159° . Une observation analogue avait été faite dans le cas de l'aluminium.

servations montre que 95° est à peine au-dessus de la zone « d'équicohésion ».

La première série d'essais du tableau ci-dessus permet d'évaluer l'influence de la charge sur le fluage primaire : à l'ambiante, pour les éprouvettes à grain fin, m croît avec la charge jusqu'à $2,6 \text{ kg/mm}^2$, puis se stabilise aux environs de 0,5 pour des contraintes plus fortes; le coefficient a varie comme $\sigma_0^{2,2}$. Pour des éprouvettes à gros grains, m change peu, compte tenu de l'augmentation de m due à la réutilisation d'une même éprouvette.

Une autre série d'éprouvettes, à l'état brut de laminage (recristallisation incomplète; résultats non reportés sur le tableau) a été essayée à l'ambiante sous des charges allant de 1 à 10 kg/mm^2 : les courbes sont bien paraboliques au début; l'exposant m oscille entre

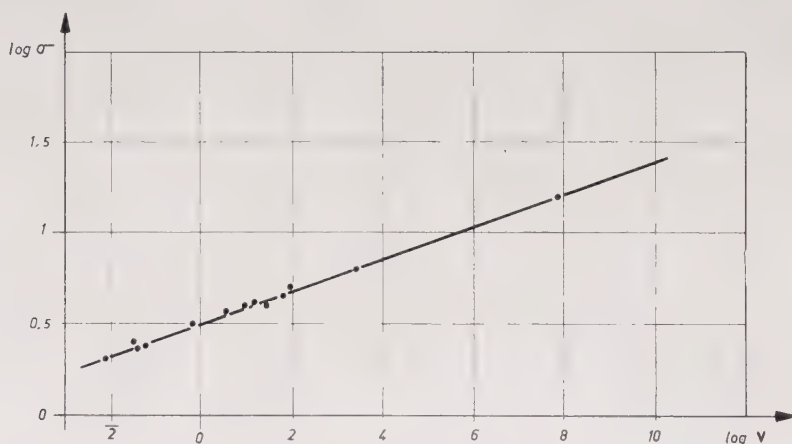


FIG. 14

Zinc : relation entre la vitesse stationnaire de fluage et la contrainte, à l'ambiante. Coordonnées semi-logarithmiques.

La série de fluages à 95° sous 500 g/mm^2 met en évidence l'influence de la grosseur de grains sur le fluage stationnaire : la vitesse correspondante est minimale pour le grain de grosseur intermédiaire ($0,13 \text{ mm}^2$). L'éprouvette à grain très fin a d'ailleurs une courbe de fluage transitoire à forme curieuse, qui semble composée de deux paraboles successives, comme si l'intervention d'un mécanisme nouveau au bout de 1 heure ou 2 (fluage intergranulaire ?) faisait augmenter l'exposant m . Cette particularité est à rapprocher de celle, analogue, observée sur les éprouvettes d'aluminium à grain fin fluant à 200° sous charge pas trop forte. L'ensemble de ces ob-

0,51 et 0,36, avec une tendance à décroître pour les charges les plus fortes. Ces essais, conduits jusqu'à la rupture, permettent de tracer la courbe donnant le logarithme de la vitesse stationnaire en fonction de la contrainte initiale (fig. 14); sur cette même courbe sont reportés deux points correspondant à la charge maximale en traction simple (traction lente et par choc). On voit que l'ensemble des points se situe bien sur une droite, correspondant à une relation exponentielle entre la vitesse et la charge.

Deux essais ont été faits dans les mêmes conditions ($30^\circ - 1200 \text{ g/mm}^2$) sur deux éprouvettes identiques, entourées d'une petite

cuve où l'on mettait de l'huile baignant l'éprouvette. Cette huile paraffinique était dans un cas additionnée de 5 % de « gélifiant » (sel d'acide gras et d'aluminium). Cette adjonction ne modifie pas la forme du fluage primaire ($m = 0,425$ dans les deux cas), mais augmente le coefficient α (2,3 au lieu de 1,7 pour l'huile inerte).

fois), même à haute température. Les valeurs calculées de l'exposant m rassemblées au tableau VI s'étalent de 0,28 à 0,85.

A propos des variations de m , on peut faire les remarques suivantes :

— en dessous de 200°, l'influence de la température sur m est moins importante que celle

TABLEAU VI

GRAIN (mm ²)	σ_0 (g/mm ²)	T °C	m	OBSERVATIONS
0,04	1 000	148	0,54	
id.	2 000	148	0,58	
id.	1 500	148	0,425	(après décharge et recouvrance de 24 h)
0,04	1 800	150	0,45	
0,37	1 500	155	0,56	encore ralenti après 100 h
2	700	163	0,38	
0,04	700	177	0,31	
id.	850	177	0,28	
0,01	1 000	175	((0,54) (puis (0,28)	irrégulier
3,2	850	175	0,37	
2,2	1 000	177	0,49	début logarithmique (360 h pour atteindre vitesse à peu près stationnaire)
8	700	197	0,46	
id.	850	197	0,62	
0,04	700	197	0,36	
id.	850	197	0,30	
0,01	1 000	222	0,60	
0,01	1 000	275	0,64	vit. stat. au bout de 100 h
0,7	500	264	0,39	encore ralenti après 48 h
id.	700	264	0,71	
0,04	500	272	0,85	
id.	750	272	0,70	
0,6	500	290	0,42	
0,04	500	290	0,59	vit. stat. $22 \cdot 10^{-5}$ /h au bout de 24 h
0,04	159	362	0,68	vit. stat. $9 \cdot 10^{-5}$ /h au bout de 48 h
0,04	100	396	(0,36 à (0,7	croissance progressive

La recouvrance est plus forte que pour l'aluminium : on observe couramment des valeurs de 10 à $15 \cdot 10^{-5}$ en un jour, atteignant $80 \cdot 10^{-5}$ dans le cas d'éprouvettes brutes de laminage.

C) Magnésium

Le magnésium présente également un fluage transitoire à forme parabolique, et se prolongeant très longtemps (plusieurs jours par-

de la charge. On peut dire que, pour des conditions telles que le fluage est faible (disons inférieur à 0,05 ou 0,1 % dans les premiers jours) m prend des valeurs de l'ordre de 0,3-0,4 ; pour des fluages plus rapides, m est plus fort et de l'ordre de 0,5 :

— au-dessus de 200°, m a tendance à croître et peut atteindre 0,85 ; mais lorsque le fluage est faible, on observe encore une certaine dis-

persion qui pourrait être due à l'action de glissements anormaux, connus pour apparaître à ces températures³⁹;

— quand on surcharge une même éprouvette, la parabole obtenue au début de ce deuxième fluage ne semble pas avoir d'exposant m anormalement fort; on observerait même plutôt la tendance inverse.

Le fluage intergranulaire ne semble prendre de l'importance qu'à température élevée, au-dessus de 250° environ. A température plus basse, les éprouvettes à grain fin fluent toujours plus lentement que celles à gros grain (à charge égale). Vers 270°, et au-dessus, bien que pour les éprouvettes à gros grain on n'ait pas atteint la vitesse stationnaire, on constate que, dans l'ensemble, les éprouvettes à grain fin fluent plus facilement. A 396°, pour un grain fin et sous faible charge, on observe un comportement analogue à celui du zinc à 95° et de l'aluminium à 200° : croissance lente de l'exposant m jusqu'à une valeur d'environ 0,7.

D) Cuivre

Quelques essais de fluage ont été effectués à l'ambiante sur du cuivre OFHC, sous charge assez forte. On a trouvé des fluages primaires paraboliques, mais avec des valeurs de l'exposant m assez faible, c'est-à-dire tendant vers une courbe logarithmique (tableau VII).

TABLEAU VII

σ_0 (kg/mm ²)	m
3,025	0,185
3,345	0,19
4,415	0,2 (?) (irrégulier)
4,8	0,13
7,2	0,13

Le coefficient a varie comme $\sigma_0^{3,6}$.

E) Nickel

Le fluage du nickel « Wiggin » a été étudié à 400 et 450°.

Les résultats de l'analyse de la forme des courbes sont reportés au tableau VIII (voir fig. 15 et 16).

Seuls les deux essais correspondant aux fluages les plus faibles (2° et 4° lignes du tableau) peuvent être analysés sans ambiguïté, à l'aide des formules du type [2] ou [8]. Dans les autres cas, apparaît une difficulté : les premiers points (fig. 15) correspondent à des $\Delta \varepsilon$ sensiblement égaux pour des temps en progression géométrique, ce qui indique, pour

TABLEAU VIII

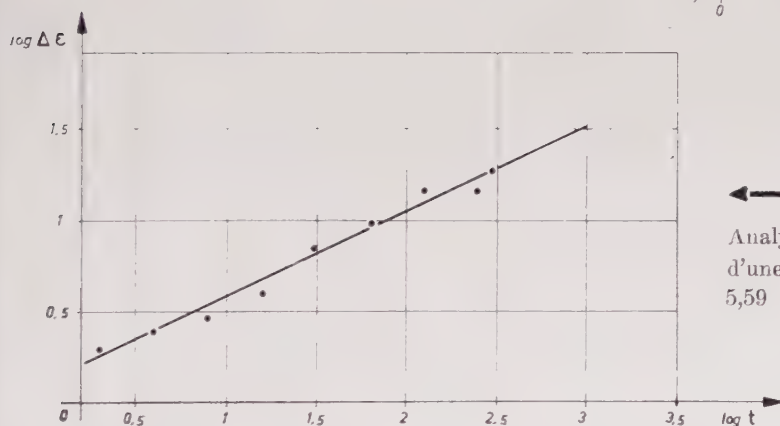
TEMPÉRATURE de recuit préalable	T °C	σ_0 kg/mm ²	FORME DE LA COURBE DE FLUAGE	
			Premier terme	Deuxième terme
600°	450	8,09	logarithmique	linéaire (en $t^{0,96}$)
700°	400	8,09	<i>parabolique</i> $m = 0,165$	accélééré en $t^{1,9}$
700°	400	10,49	logarithmique	linéaire
700°	450	5,59	<i>parabolique</i> $m = 0,45$	absent
700°	450	8,09*	logarithmique ou hyperbolique en : $\frac{1}{(t + t_0)^{0,5}}$ (t_0 petit)	linéaire (en $t^{0,97}$) <i>parabolique</i> en $t^{0,4}$
700°	450	10,49	logarithmique	en $t^{0,73}$
800°	400	8,09	logarithmique	accélééré en $t^{1,6}$
900°	450	8,09	logarithmique	en $t^{0,84}$

* Deux essais, dont les courbes sont très sensiblement superposables.

cette portion, un fluage logarithmique **; pour la fin de la courbe, on est conduit à ajouter un deuxième terme d'exposant ≤ 1 , et qui, dans certains cas, correspondrait donc encore à un fluage transitoire. On peut d'ailleurs tout aussi bien interpréter les courbes comme la somme d'un terme hyperbolique tendant rapidement vers une asymptote et d'un terme parabolique d'exposant raisonnable pour un fluage transitoire (cf. fig. 15 et analyse correspondante; la même possibilité existe pour les autres courbes).

FIG. 15

Analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de fluage de nickel, à 450° sous 8,09 kg/mm². Anamorphose double log; unités arbitraires. La courbe peut être interprétée de deux façons : soit comme la somme des deux termes AB (logarithmique) et CD (parabolique avec $m = 0,97$); soit comme la somme des deux termes ab (hyperbolique) et cd (parabolique avec $m = 0,4$).



Dans le cas de l'aluminium raffiné, nous avons été amenés à une interprétation analogue pour les premières minutes de certaines courbes de fluage rapide (A, 4°).

Pour départager ces deux interprétations possibles, il faudrait des essais de durée excessive.

** Nous avons trouvé récemment une référence à des travaux de Kanter¹⁹ où il indique qu'un acier ferritique présente un fluage parabolique avec un exposant m croissant avec la température; vers 250°, cet exposant serait voisin de 0 à 0,2, ce qui correspond assez bien à nos courbes logarithmiques.

Cette discussion montre que, lorsque le fluage transitoire ne suit pas une loi simple sur un intervalle de temps suffisant (disons pour des temps variant dans le rapport de 1 à 100), il existe plusieurs manières possibles « d'analyser » la courbe. En particulier, on peut se demander si les cas de « fluage logarithmique » signalés dans la littérature ne sont pas souvent le résultat de la superposition d'un fluage initial rapidement amorti, et d'un

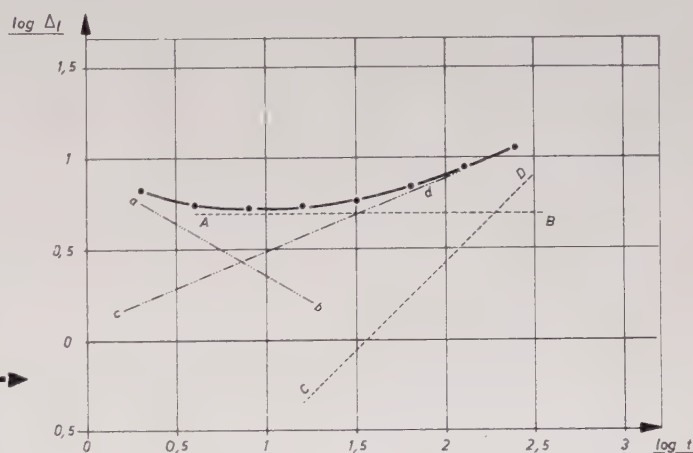


FIG. 16

Analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de fluage de nickel à 450° sous 5,59 kg/mm². Anamorphose double logarithmique; unités arbitraires.

terme parabolique normal. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point à propos du fer Armco et des aciers sorbitiques, et de montrer que cette ambiguïté se présente en général dans les conditions où le fluage est rapide au début.

F) Acier austénitique nicral D (Cr-Ni 25-20)

A 600°, sous 10 kg/mm², le fluage de cet acier à l'état recuit à 925° et refroidi 25°/h, obéit très bien à une loi du type [8] :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a t^{0,38} + b t^{1,46}$$

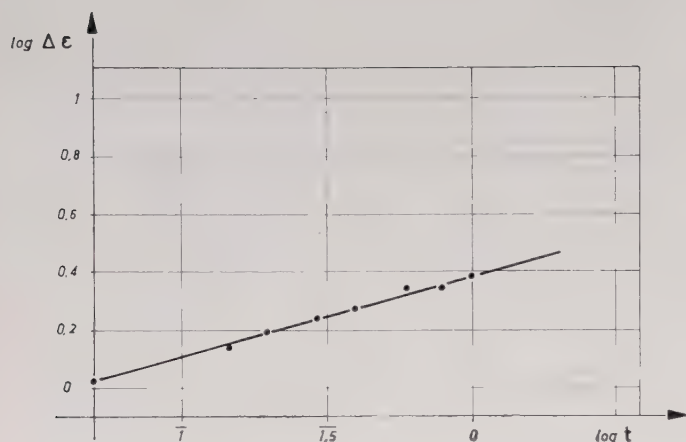


FIG. 17

Analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de recouvrance de nical D, après fluage à 600° sous 10 kg/mm². Anamorphose double logarithmique; unités arbitraires.

Recouvrance.

La recouvrance est importante, et atteint $50 \cdot 10^{-5}$ en 24 h. Elle suit très bien une loi parabolique :

$$\varepsilon = \varepsilon'_0 - a't^{m'} \quad [39]$$

Cette loi ne peut évidemment être extrapolée indéfiniment, car elle conduirait à des longueurs inférieures à la longueur initiale, **mais** elle décrit avec beaucoup d'exactitude la courbe enregistrée pendant la première journée, comme le montre la figure 17.

Après fluage à 600° de 72 heures, pour différentes valeurs de la charge de fluage (ou de la contrainte initiale σ_0) l'exposant m' et le coefficient a' de la recouvrance ont les valeurs portées au tableau IX.

TABLEAU IX

σ_0 kg/mm ²	m'	a' (unités arbitraires)
5,22	0,56	1,03
7,5	0,27	2,30
10	0,21	5,70
15	0,27	11,75
18	0,20	28,6

On constate que a' varie comme $\sigma_0^{2,6}$.

On a aussi étudié la recouvrance après traction à froid : une éprouvette, allongée de 2 % à l'ambiante, a été mise dans le four de la machine TR et portée en 2 h à peu près à 600°. On obtient une recouvrance notable ($9 \cdot 10^{-5}$ en 115 h), parabolique au début, mais qui s'écarte ensuite de la parabole pour s'amortir plus vite (fig. 18).

Un autre alliage austénitique de même genre (ATV 1) après fluage à 500° sous 10 kg/mm² donne une courbe de recouvrance qui ressemble à celle de la figure 18.

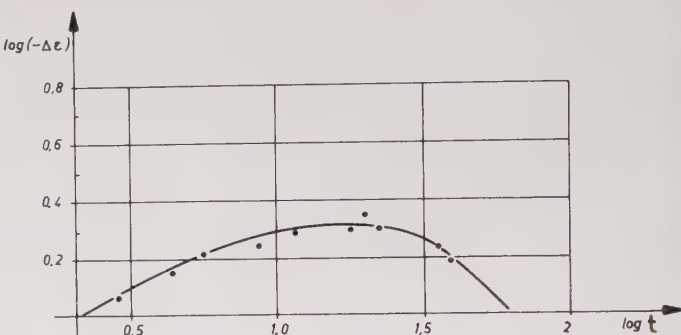


FIG. 18

Analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de recouvrance de nical D à 600 °C, après allongement effectué à l'ambiante. Anamorphose double logarithmique; unités arbitraires.

G) Fer Armco

Des essais de fluage ont été effectués, sur fer Armco recuit, à des températures échelonnées entre 350 et 500°.

Le début des courbes de fluage, d'après l'analyse différentielle, semble logarithmique comme dans le cas du nickel étudié plus haut. Mais on se heurte en fait à la même ambiguïté dans l'interprétation; en outre, les résultats semblent plus dispersés que pour le nickel. Ainsi trois essais effectués sous 5 kg/mm² à 400° donnent trois courbes différentes dont les analyses différentielles sont représentées sur la figure 19. Ces courbes semblent se composer de deux tronçons, dont les pentes varient d'un cas à l'autre; pour le premier, la pente va de 0 (logarithmique) à 0,22; pour le second, de

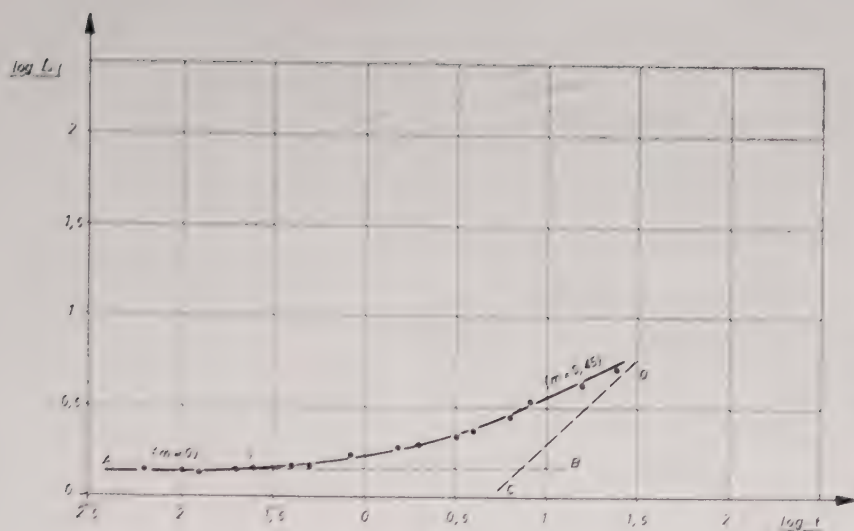


FIG. 19 a

Analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de fluage de fer Armeo à 400° sous 5 kg/mm². Anamorphose double logarithmique; unités arbitraires.

FIG. 19 b
Mêmes conditions que 19 a, autre éprouvette.

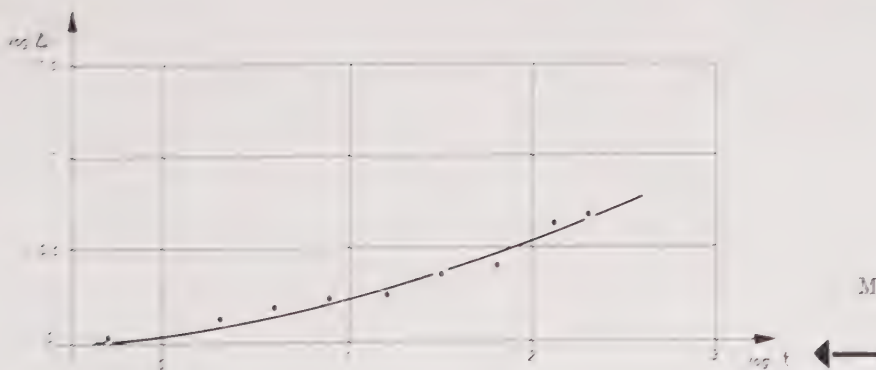
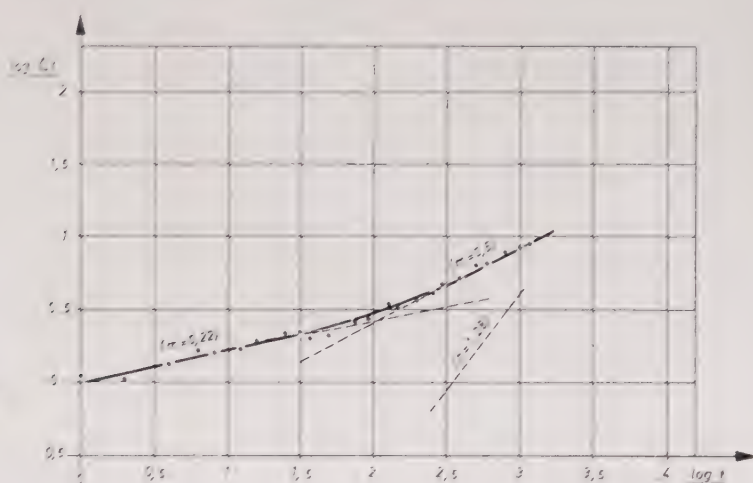


FIG. 19 c

Mêmes conditions que 19 a et b
autre éprouvette

0,45 à 0,55. Diverses formules représentatives sont possibles :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + a \log(1 + t) + b t \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + a t^{0,22} + b t^{1,22} \end{aligned} \quad [40]$$

Mais ces formules additives ne sont pas parfaitement satisfaisantes; on a plutôt l'impression d'un terme initial, logarithmique ou

parabolique à exposant faible, durant une demi-heure à 1 heure et qui se transforme progressivement en une courbe parabolique à exposant plus normal, voisin de 0,4 à 0,5.

D'autres essais, à 400° sous 6 kg/mm² et à 450° sous 4 kg/mm² donnent lieu à des constatations analogues. La courbe de ce dernier (fig. 20 a) est particulièrement frappante. On

peut se demander si la portion initiale n'est pas le résultat d'une perturbation due à la mise en charge rapide. Cette impression est confirmée par l'essai suivant : une éprouvette identique est essayée à 450° sous la même charge de 4 kg/mm². Mais la mise en charge, au lieu d'être rapide (de 1 à 2 minutes) est effectuée progressivement à l'aide d'un moteur, et dure 1 h 20 mn; en comptant les temps à partir de la fin de la mise en charge, on obtient une très bonne courbe parabolique

l'essai de décomposition en deux termes additifs du genre.

$$\varepsilon_0 + a \log t + b t^n$$

où n était parfois ≥ 1 , ne correspondait sans doute à rien de réel.

Recouvrance.

Le fer Armco présente une recouvrance plutôt faible, ne dépassant pas $15 \cdot 10^{-5}$ en 24 h. Les courbes correspondantes sont logarith-

FIG. 20 a

Analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de fluage de fer Armco à 450° sous 4 kg/mm². Anamorphose logarithmique; unités arbitraires.

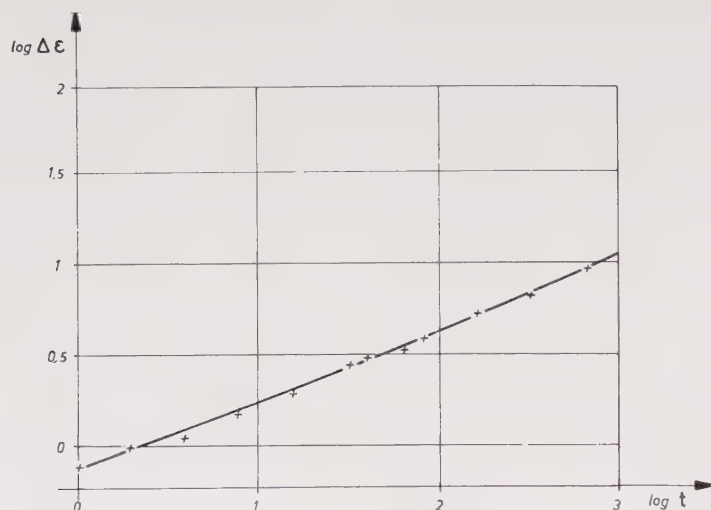
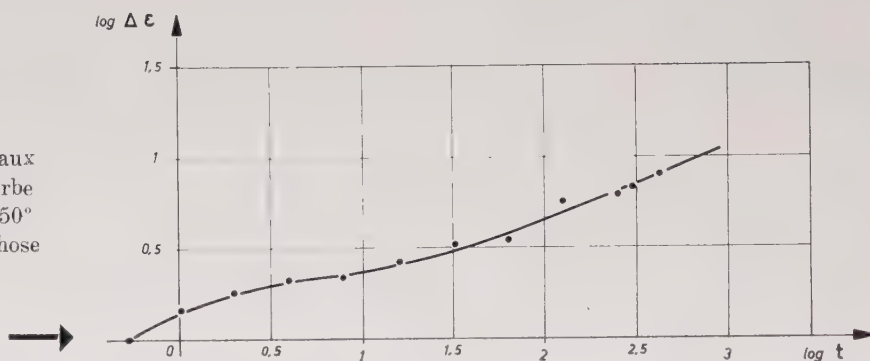


FIG. 20 b

Mêmes conditions que 20 a; autre éprouvette; mise en charge lente.

(fig. 20 b), et qui le reste sur un intervalle de temps considérable (de 5 mn à 96 h) : l'exposant m vaut ici 0,38. Sans doute un certain fluage se produit pendant la mise en charge, mais il ne semble pas nécessaire de tenir compte dans l'analyse d'un décalage correspondant de l'origine des temps.

Les deux courbes de la figure 20 se recouvrent bien vers la fin, ce qui montre que, dans l'analyse des courbes à mise en charge rapide,

miques au début, et tendent à devenir hyperboliques au bout de quelques heures, comme le montre la figure 21.

H) Acier sorbitique (45 NCD 17). Coulée I

Cet acier, à l'état trempé revenu, contient des précipités fins et serrés, comme le montrent les micrographies électroniques de la planche I. Ces précipités ayant été obtenus par

TABLEAU X

T °C	σ_0 kg/mm ²	m	unités a $\bar{\epsilon} \cdot 10^{-5}$ 1,5 s	OBSERVATIONS
500	5	(0,3-0,4)		Début irrégulier (secousses ?)
500	12	0,30	0,8	Tout au début, m plus fort
500	15	0,35	1,1	<i>Id.</i>
500	18	0,30	1,5	<i>Id.</i>
500	23	0,34	1,9	
500	26	0,36	2,4	
500	33,5	0,36		Au début m faible (log ?)
550	12	0,38		
550	15	0,39	3,2	
600	15	0,57	4,95	
500	8 (2 h) puis 13	0,49		

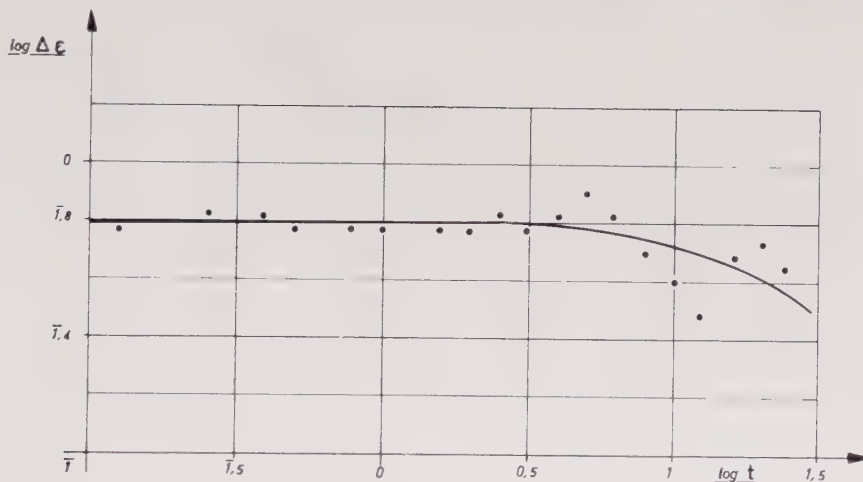


FIG. 21

Analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de recouvrance de fer Armeo. Anamorphose double logarithmique ; unités arbitraires

revenu à 650 °C, on peut considérer qu'ils sont stables aux températures des essais de fluage, qui n'ont pas dépassé 600°. La présence de ces précipités apparente la structure de cet acier à celle des aluminiums « impurs » étudiés plus haut (A) et l'on peut donc s'attendre à ce que le fluage transitoire ait une forme parabolique régulière. C'est bien ce que l'on observe en général, comme l'avait déjà signalé J. de La-combe pour d'autres aciers sorbitiques²⁰. Le tableau X résume les résultats de nos essais.

L'exposant m croît un peu avec la charge et

la température, passant de 0,3 à 0,57 pour 600° sous 15 kg/mm². Le coefficient a croît en fonction de la charge comme $\sigma_0^{1,5}$. On voit aussi que, comme dans d'autres métaux, le fait d'avoir subi un fluage antérieur sous charge plus faible conduit ensuite à une valeur de m anormalement forte.

La comparaison du coefficient a des courbes sous 15 kg/mm² à 500 et 550° permet, par la méthode décrite en A, 4°, pour l'aluminium, de calculer une énergie d'activation de 73.000 cal/mole.

Tout au début du fluage, pendant 10 à 20 secondes parfois, la courbe s'écarte de la parabole régulière. Ce n'est d'ailleurs pas étonnant, car une parabole d'exposant inférieur à 1 possède au départ une tangente infinie, alors que la vitesse de fluage est finie. L'enregistrement photographique très rapide permet l'étude des phénomènes initiaux, qui mène à plusieurs constatations intéressantes.

1° Forme du début de fluage.

A la fin de la mise en charge, la courbe démarre avec une tangente finie, comme on devait s'y attendre. On peut mesurer la vitesse de fluage V en chaque point (tangente à la courbe), et porter $\log V$ soit en fonction du temps t , soit de $\log t$, sur un diagramme (fig. 22). La première représentation montre qu'au début, pendant 7 secondes environ, les courbes suivent une décroissance exponentielle; la

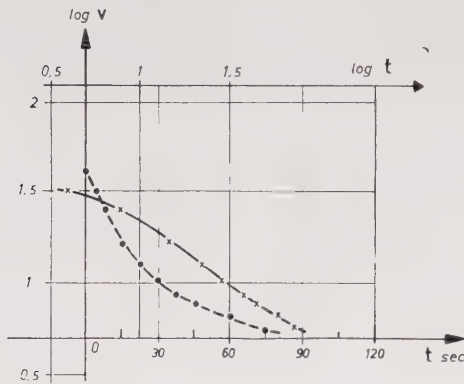


FIG. 22

Début du fluage d'une éprouvette d'acier 45 NCD 17 à 500 °C sous 24,5 kg/mm². Log v (vitesse de fluage; unités arbitraires) en fonction de log t (croix) ou de t (points), en secondes.

deuxième représentation ($\log V - \log t$) montre qu'après 10 secondes on rattrape une décroissance hyperbolique de la vitesse; la pente de cette seconde portion est $-0,64$, ce qui correspond à une courbe de fluage parabolique d'exposant $m = 0,36$, en bon accord avec les valeurs du tableau X.

La courbe de la figure 22 a été obtenue à 500 °C sous 24,5 kg/mm². On a trouvé une courbe semblable à 550 °C; la partie exponentielle est un peu plus longue et la courbe ne devient parabolique qu'après 30 s, avec un exposant 0,45.

2° Influence de la charge sur la vitesse initiale.

La vitesse initiale V_0 peut être, soit mesurée directement, soit (en cas de difficulté) évaluée par extrapolation à rebours de diagrammes, tels que ceux de la figure 22. La variation de V_0 en fonction de la charge à 500 °C est représentée sur la figure 23. On voit que ces deux grandeurs sont proportionnelles tant que la charge ne dépasse pas 25 kg/mm²; au delà V_0 se met à croître plus rapidement.

3° Cas d'une charge forte à température peu élevée.

Dans les essais effectués vers 500 à 600 °C et reportés au tableau X, l'allongement à la mise en charge est proportionnel à la charge et égal au raccourcissement instantané à la décharge; le coefficient de proportionnalité à 500 °C, par exemple, donne un module de 17.000 kg/mm², qui correspond bien à une déformation purement élastique.

Mais, déjà pour la charge de 33,5 kg/mm², le début de fluage présente une légère anomalie (portion logarithmique) qui se traduit sur l'analyse différentielle en sens inverse des phénomènes signalés plus haut en 1°. Il semblerait qu'on tende vers les cas de fluage initial rapide discutés plus haut à propos du nickel et du fer Armco.

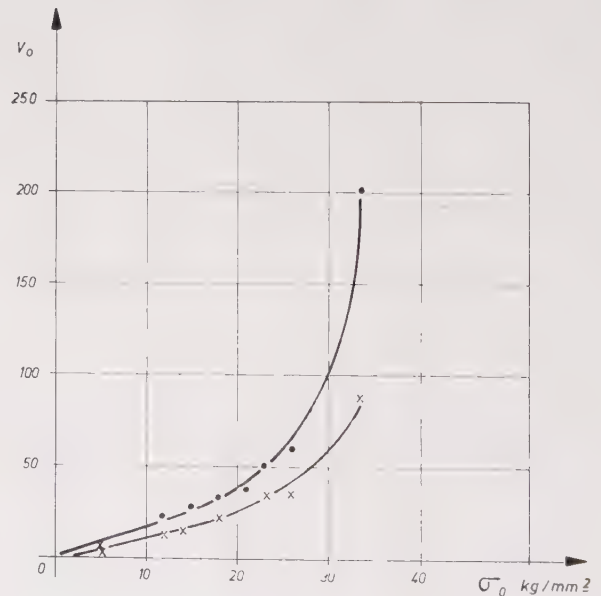


FIG. 23

Acier 45 NCD 17. Vitesse initiale de fluage, V_0 , en fonction de la contrainte initiale σ_0 (en kg/mm²). Points et croix : deux séries d'essais différents, tous deux à 500 °C.

Pour des charges encore plus fortes (par exemple 40 kg/mm² à 400°) on observe très nettement un terme de fluage initial rapidement amorti (comme dans la figure 13 pour l'aluminium ou pour les fluages « logarithmiques » du fer et du nickel), qui dure 2 à 3 minutes; au bout de ce temps, on rattrape le fluage parabolique.

4° Mise en charge progressive.

Un dispositif simple nous a permis d'effectuer une mise en charge progressive à vitesse de mise en charge constante : il s'agit d'un seau, accroché au levier de mise en charge, où l'on fait arriver un débit d'eau constant.

Deux essais ont été effectués à 600°, en enregistrant en même temps l'allongement à la vitesse rapide. Le seau vide donne une tare de 5 kg/mm²; on attend que le fluage initial sous cette charge faible soit pratiquement éteint; on met alors le courant d'eau, pour porter la charge de 5 à 12,8 kg/mm². Les courbes enregistrées ont l'allure de celles reproduites sur la figure 24.

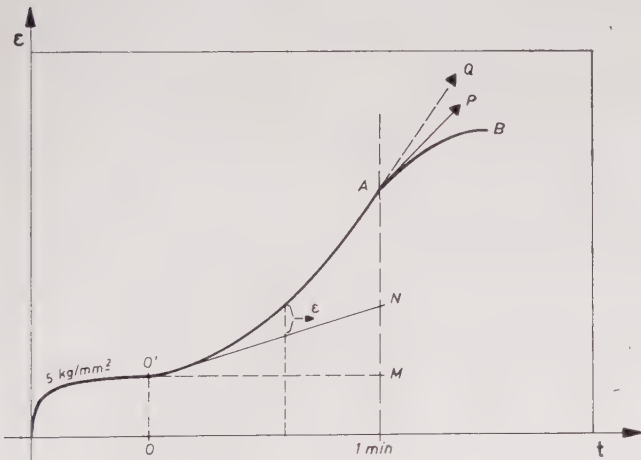


FIG. 24

Acier 45 NCD 17. Courbe de fluage avec mise en charge progressive à 600 °C.

Deux essais ont été effectués, à deux vitesses de mise en charge (en 1 minute, fig. 24, et en 2 minutes 1/4).

Soit O'M la tangente (sensiblement horizontale) avant admission de l'eau;

O'N la tangente juste après admission de l'eau;

AQ la tangente juste avant coupure de l'eau;

AP la tangente juste après coupure de l'eau;

on observe que la différence de pentes O'N-O'M est égale à celle des pentes AQ-AP; cette différence représente la vitesse d'allongement élastique sous l'effet du flux d'eau. On observe d'ailleurs que MN a la même valeur dans les deux essais (indépendante de la vitesse de mise en charge) égale à l'allongement élastique pour une charge de 7,8 kg/mm² = 12,8 — 5.

On peut mesurer l'allongement de fluage ε , différence entre l'ordonnée de la courbe enregistrée O'A au temps t et l'ordonnée correspondante sur la tangente O'N (fig. 24). On trouve que cet allongement ε (en unités 10⁻⁵; t en secondes) suit des lois paraboliques accélérées :

Mise en charge en 2 minutes 1/4 .

$$\varepsilon = 12 \cdot 10^{-4} t^{2,13} = 0,52 (\sigma - \sigma_0)^{2,13} \quad [42]$$

Mise en charge en 1 minute :

$$\varepsilon = 68 \cdot 10^{-4} t^{1,95} = 0,36 (\sigma - \sigma_0)^{1,95}$$

où σ_0 représente la tare à vide (5 kg/mm²).

Dans la partie finale des courbes (où la précision relative sur ε est meilleure), on pourrait aussi représenter approximativement les courbes respectivement par :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 21 \cdot 10^{-4} t^2 \quad (2 \text{ minutes } 1/4) \\ \varepsilon &= 54 \cdot 10^{-4} t^2 \quad (1 \text{ minute}) \end{aligned} \quad [43]$$

On en déduirait pour la vitesse de fluage :

$$\begin{aligned} V &= \frac{d\varepsilon}{dt} = 42 \cdot 10^{-4} t \\ &= 0,066 \sigma \quad (2 \text{ minutes } 1/4) \end{aligned} \quad [44]$$

et :

$$V = 108 \cdot 10^{-4} t = 0,078 \sigma \quad (1 \text{ minute})$$

c'est-à-dire une vitesse de fluage sensiblement proportionnelle à la charge avec un coefficient de proportionnalité à peu près le même (# 0,07) dans les deux cas. Il semblerait donc qu'en première approximation, dans ces essais à charge progressive, on puisse négliger l'érouissage.

Une analyse plus poussée montre qu'il n'en est rien; cette analyse est délicate, car il est difficile de comparer ce coefficient de proportionnalité à celui de la figure 23, relative à

la vitesse de fluage initiale mais à température plus basse (500° au lieu de 600°); une comparaison avec d'autres essais montre que, en passant de 500 à 600°, les vitesses initiales sont multipliées par 20 environ (ce qui correspond à une chaleur d'activation d'environ 40.000 cal/mole, valeur assez raisonnable). En multipliant par 20 (ce qui représente un minimum) le coefficient de proportionnalité moyen de la figure 23, et en prenant pour unité 10^{-5} et la seconde, on trouve 0,5, valeur beaucoup plus élevée que la valeur 0,07 trouvée ici. Cette différence est due au fait que le fluage qui se produit pendant la mise en charge progressive écroute le métal. C'est à cause de cet écrouissage, qui se fait moins sentir dans la mise en charge la plus rapide, que dans ce cas le coefficient de proportionnalité $\left(\frac{V}{\sigma}\right)$ (équation 44) est un peu plus fort que dans l'autre; c'est pour la même raison sans doute que les exposants de t sont un peu différents de 2.

Ensuite, au début, pendant une durée qui excède rarement 1 ou 2 minutes, la courbe de recouvrance est symétrique de la courbe de fluage; elle a donc dans cet intervalle de temps une forme parabolique (cf. [39] en A 3°).

$$\varepsilon = \varepsilon'_0 - a' t^{m'}$$

Comme la vitesse initiale de fluage, la vitesse initiale de recouvrance est proportionnelle à la charge sous laquelle a eu lieu le fluage. C'est ce que montre la figure 25, qui représente la vitesse initiale de recouvrance et le raccourcissement dans les sept premières secondes.

On voit même que la proportionnalité s'étend jusqu'à des charges dépassant 30 kg/mm², ce qui n'était pas le cas pour le fluage (comparer les figures 23 et 25). Ceci montre que le fluage initial très rapide aux fortes charges (étudié au paragraphe 33, et qui est responsable de l'écart à la proportion-

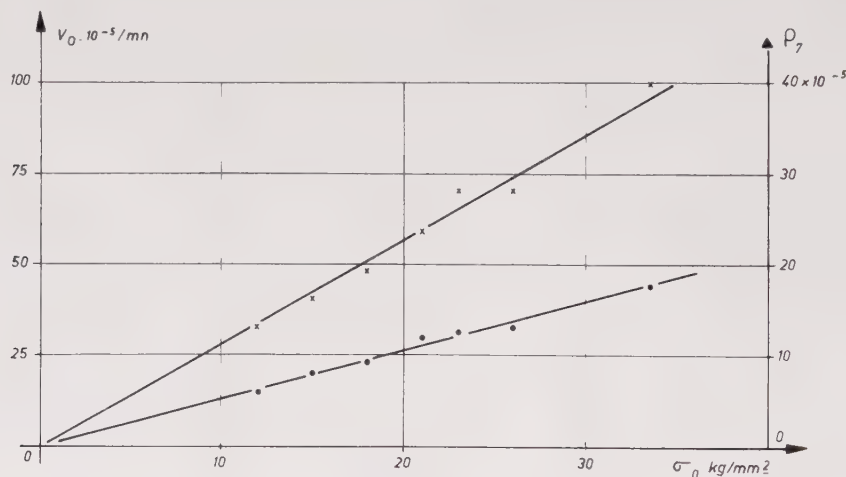


FIG. 25

Acier 45 NCD 17. Début de recouvrance, après fluage à 500 °C sous la charge σ_0 portée en abscisse. Croix : v_a , vitesse initiale. Points : ρ_7 recouvrance en 7 s.

5° Recouvrance. Décharge partielle.

Le raccourcissement instantané est purement élastique, comme nous l'avons dit plus haut en 3°. Par enregistrement photographique à vitesse rapide, on peut mesurer la vitesse initiale de recouvrance, après fluage sous une charge σ_0 ; on trouve qu'elle est sensiblement égale à la vitesse initiale de fluage à la mise en charge sous σ_0 .

nalité au delà de 23 kg/mm² sur la figure 23) n'est pas « recouvrable »; il s'agit là d'un fluage ou déformation plastique irréversible, très rapide, et qui semble additif à la partie réversible.

La vitesse de recouvrance initiale ne dépend que de la charge sous laquelle a eu lieu le fluage (et de la température), mais pas sensiblement de l'allongement, ni de la durée sous

charge, comme le montrent les chiffres du tableau XI.

TABLEAU XI

σ_0 kg/mm ²	DURÉE de fluage	Vitesse initiale de recouvrance (pente du diagramme enregistré)
26	2 mn	0,7
26	35 mn	0,7
12	4 h	0,34
12	71 h	0,34

Après les premiers instants, la recouvrance devient progressivement plus lente (en valeur absolue) que le fluage. Elle s'écarte de l'allure parabolique et semble tendre vers une asymptote horizontale; tout ou moins peut-on dire qu'au bout de quelques dizaines d'heures la vitesse de recouvrance est devenue insensible. La recouvrance tend donc à ce moment vers une amplitude limite pratique, ρ_L , représentée sur les figures 26 et 27 en fonction de l'allongement au fluage antérieur pour diverses conditions de ce fluage (ρ représente le raccour-

à recouvrance », au sens défini au chapitre premier); on s'en approche d'autant plus que l'allongement de fluage a été plus faible et, pour un même allongement, que la durée de fluage a été plus courte.

En réalité, il est difficile de savoir où devrait se placer l'asymptote pour une durée de recouvrance infinie. Considérons par exemple la figure 28, qui représente l'analyse, par la méthode aux différences finies, d'une courbe de recouvrance après fluage de $38 \cdot 10^{-5}$ en 4 h à 500° sous 12 kg/mm^2 . La réversibilité apparente « pratique » n'est pas totale, puisqu'après 34 heures de recouvrance, il subsiste un allongement résiduel de $10,4 \cdot 10^{-5}$. On remarque cependant que la partie initiale de la courbe correspond à une loi parabolique du type :

$$\varepsilon = \varepsilon'_0 - a' t^{0,39}$$

mais que la partie finale suit assez bien une loi hyperbolique du genre :

$$\varepsilon = \frac{15}{t^{0,35}} + C^{te} \quad (t \text{ en minutes, } \varepsilon \text{ en } 10^{-5})$$

et, en ajustant la constante à la courbe réelle, on trouve $0,2 \cdot 10^{-5}$, c'est-à-dire sensiblement 0.

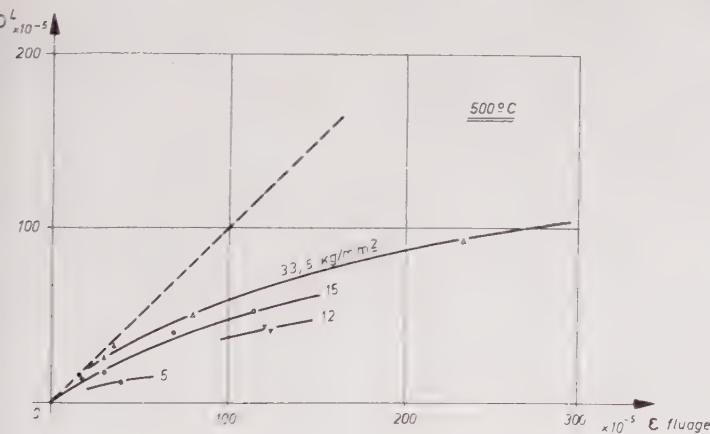


FIG. 26

Acier 45 NCD 17. Recouvrance limite, ρ_L , en fonction de l'allongement de fluage ϵ à 500° sous diverses charges.

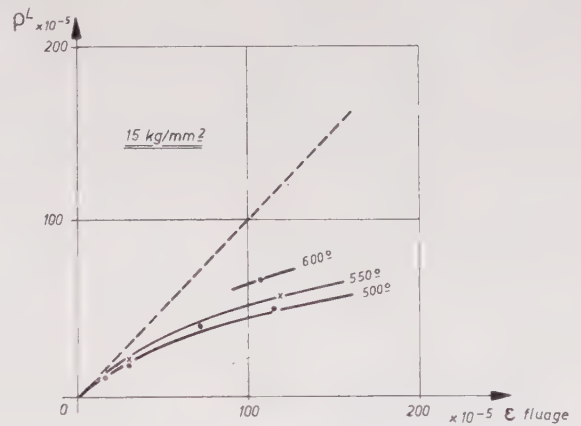


FIG. 27

Acier 45 NCD 17. Recouvrance limite, ρ_L , en fonction de l'allongement de fluage ϵ sous 15 kg/mm^2 à diverses températures.

cissement, déduction faite du raccourcissement instantané élastique). La figure 26 représente ρ_L à 500° pour diverses charges; la figure 27 sous une charge (15 kg/mm^2) à diverses températures. Sur ces deux figures, la droite à 45° correspond à l'annulation de l'allongement résiduel, l'éprouvette revenant à sa longueur initiale avant charge (déformation « élastique

Ceci est une bonne présomption pour dire qu'en réalité, en poursuivant l'essai beaucoup plus longtemps, on tendrait asymptotiquement vers la longueur initiale, c'est-à-dire que la recouvrance serait totale.

C'est pourquoi la recouvrance limite représentée sur les figures 26 et 27 n'a qu'un

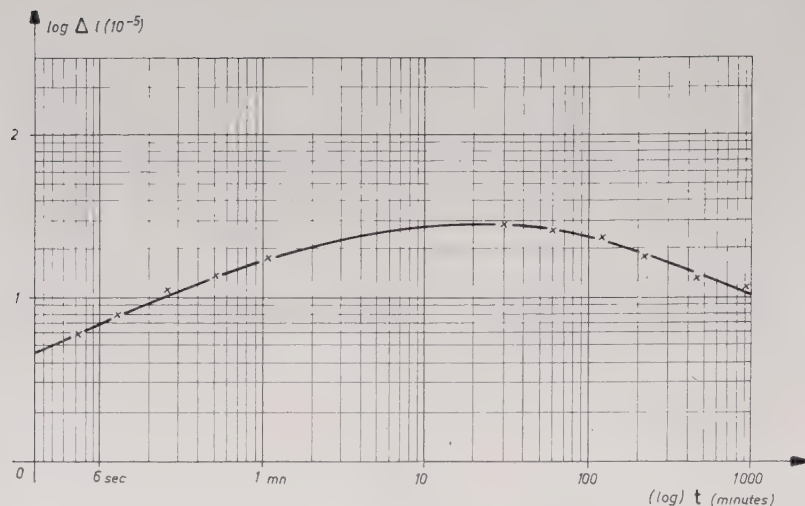


FIG. 28

Acier 45 NCD 17. Analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de recouvrance après fluage à 500 °C sous 12 kg/mm².

sens pratique; en attendant un temps infini, on peut se demander si la recouvrance ne serait pas complète et ne tendrait pas à devenir égale à l'allongement de fluage précédent, tout en durant plus longtemps. Il semble en réalité que pour les fluages de durée assez longue, ce ne soit pas le cas (points situés à droite dans les figures 26 et 27).

On peut chercher une équation représentant la courbe de la figure 28; une loi convenant assez bien serait parabolique au début, hyperbolique à la fin; c'est ce que l'on peut obtenir en écrivant :

$$\varepsilon = a' (t_0 + t)^{m'} - a' t^{m'} \quad [45]$$

On vérifie en effet que, pour t petit vis-à-vis de la constante t_0 , ε vaut sensiblement :

$$\varepsilon \approx a' t^{m'_0} - a' t^{m'}$$

qui est de la forme de l'équation [39]. On constate en outre que la longueur initiale, sous cette forme, s'écrit :

$$\varepsilon'_0 = a' t_0^{m'}$$

Si l'on prend pour origine des allongements la longueur de l'éprouvette avant mise en charge, la constante t_0 représente la durée de fluage avant décharge, et ε'_0 l'allongement de fluage, à condition d'égaliser les coefficients a' et m' à ceux a et m du fluage; or cette égalité est réalisée pratiquement, comme nous l'avons dit plus haut (on observe même que la vitesse initiale de recouvrance serait plutôt supérieure à celle du fluage, comme on le constate en comparant les figures 23 et 25).

Pour les valeurs de t grandes par rapport à t_0 , l'équation [45] se réduit sensiblement à :

$$\varepsilon \approx \frac{a m t_0}{t^{1-m}}$$

qui est bien de forme hyperbolique; quoique d'exposant un peu différent de celui qu'on observe sur la figure 28, pour la branche asymptotique aux grandes valeurs de t .

Dans l'ensemble, la formule [45] représente donc bien les courbes de recouvrance, au moins lorsque celle-ci est à peu près totale.

On peut aussi, sur un acier identique, voir ce qui se passe lorsque la décharge est, non totale, mais partielle⁴¹; on observe qu'à toute variation instantanée de charge correspond une variation de vitesse qui lui est proportionnelle. Cette loi généralise la proportionnalité entre la vitesse initiale de fluage (ou de recouvrance) et la contrainte établie plus haut.

On remarque que, vis-à-vis des variations de contrainte, les variations de vitesse de fluage instantanées qui en résultent restent dans le domaine linéaire; mais il n'en est pas tout à fait de même pour la suite du fluage, car le coefficient a du fluage parabolique varie comme $\sigma^{1,5}$ et non comme σ .

J) Verre pyrex

Les mordaches, spéciales décrites au chapitre troisième (I, A) permettent d'enregistrer des courbes de fluage et de recouvrance sur des éprouvettes de verre dont la partie cylindrique a 4 mm de diamètre et 32 mm de long.

A l'état brut (refroidissement rapide à l'air), ce verre est instable du point de vue mécanique et conserve des tensions internes, qui, lorsqu'on le porte à des températures de 400 à 500°, provoquent une contraction spontanée. Cette contraction reste faible (10^{-3} dans le cas le plus défavorable); et comme elle suit une loi sensiblement parabolique que l'on peut calculer dans la période de maintien isotherme précédant la mise en charge, on peut par extrapolation prolonger cette courbe correspondant à la charge utile; c'est par rapport à cette courbe extrapolée qu'ont été mesurés tous les allongements de fluage à l'état brut.

A l'état recuit (15 h à 530°, refroidissement au four) cette instabilité disparaît; la longueur reste invariable en cours de maintiens isothermes.

Au cours des essais de fluage, qui ont été effectués à 400° et à 500 °C, on observe, après l'allongement instantané ε_0 , un fluage transitoire qui dans tous les cas, sauf un, est bien parabolique. On atteint un fluage stationnaire à vitesse constante, au bout d'un temps assez long, de l'ordre d'un jour. A la décharge, on obtient un raccourcissement instantané inférieur ou égal à l'allongement à la mise en charge, suivi d'une recouvrance importante: le début des courbes de recouvrance est également parabolique, et a la même forme (changée de sens) que le début du fluage; au bout de quelques heures, la vitesse de recouvrance se ralentit plus vite que la vitesse de fluage, et la courbe de recouvrance a tendance à devenir logarithmique ou même hyperbolique (courbes analogues à celle de la figure 28).

La figure 29 a représente les courbes de fluage et de recouvrance de ce verre enregistrées à 500 °C pour une charge $\sigma_c = 1,580 \text{ kg/mm}^2$.

Les caractéristiques de toutes les courbes enregistrées sont reportées au tableau XII.

A l'état recuit, le raccourcissement instantané à la décharge est égal à l'allongement à la mise en charge. On en déduit pour le module élastique une valeur de 6 000 kg/mm² après recuit à 530° et 5 500 kg/mm² après recuit à 550°; ces valeurs sont raisonnables pour le module d'un verre à cette température.

A l'état brut, les variations de longueur sont beaucoup plus fortes (de l'ordre de dix fois plus à 400° et quatre fois à 500°); de plus le raccourcissement instantané ne vaut que 60

à 75 % de l'allongement à la mise en charge. Ces faits montrent que ces variations de longueur comportent une contribution anélastique importante, qui est d'ailleurs partiellement éliminée par le chauffage à 500°.

En ce qui concerne le fluage, celui-ci est plus rapide dans l'ensemble à l'état brut qu'à

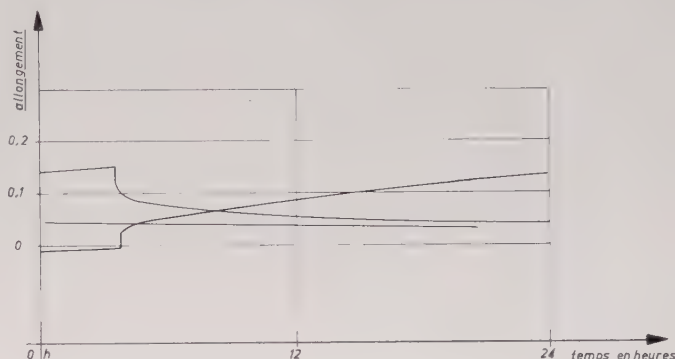


FIG. 29 a

Courbes de fluage et de recouvrance de verre pyrex recuit à 500 °C sous 1,58 kg/mm² (au début, mise en charge non pas à partir de 0, mais de 439 g/mm²; voir tableau XII). Enregistrement à la machine TR.

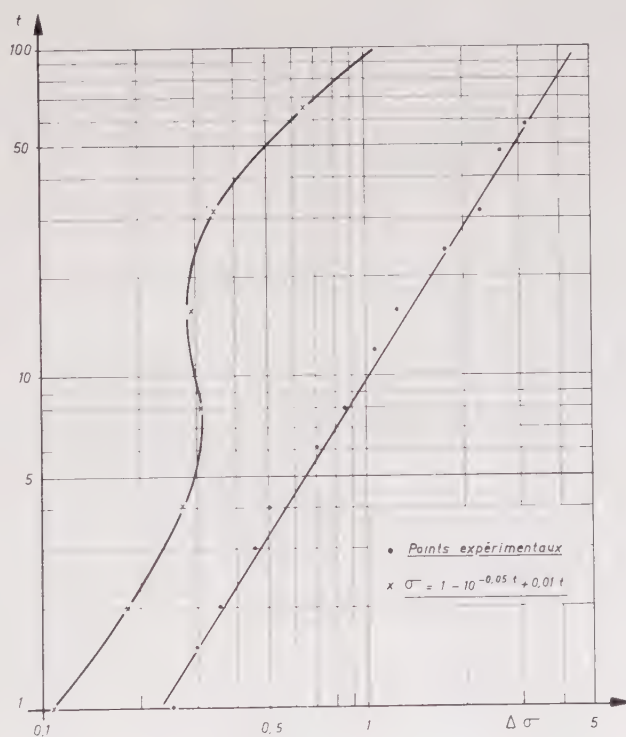


FIG. 29 b

Verre pyrex. Point : analyse par la méthode aux différences finies d'une courbe de fluage à 500 °C sous 790 g/mm². Croix : analyse par la même méthode d'une courbe qui suivrait la formule [6].

TABLEAU XII

ETAT	T °C	σ_0 kg/mm ²	ε_0 10 ⁻⁵	m	v. station- naire 10 ⁻⁵ /j.	Rac- courcis- sement instant. 10 ⁻⁵	OBSERVATIONS
Brut	400	0,157 0,314 0,942	24 + 24 + 130	0,28 0,38 0,63	9	111	surcharge directe <i>id.</i>
Même éprou- vette	500	0,157 0,942	11 + 58	0,69	62	44	surcharge directe
Recuit 15 h 530°	500	0,439	6	(0,31)	14	6	fluage initial anormale- ment rapide, genre ex- ponentiel : $\varepsilon \# \varepsilon_1 - K e^{-\lambda t}$ $+ a t^{0,31} + b t$
	<i>Id.</i>	0,439	6			6	même éprouvette re- chargée après 4 h de recouvrance, début de courbe normal
	<i>Id.</i>	0,790	14,5	0,56	26		après recouvrance
	<i>Id.</i>	1,110	+ 3		36	18	surcharge directe
<i>Id.</i> recuit 550° (20 h)	<i>Id.</i>	0,439	11				
	<i>Id.</i>	1,580	+ 19	0,52	68	30	surcharge directe

l'état recuit. Dans ce dernier état, mis à part le fluage initial anormalement rapide de la toute première charge, on obtient des courbes de fluage obéissant bien à la loi de la formule [8] avec $n = 1,8$ à $2,6$. La figure 29 *b* montre en particulier l'analyse, par la méthode aux différences finies, d'une courbe enregistrée sous 790 g/mm² et, à titre de comparaison, celle d'une courbe de même pente moyenne, mais qui obéirait à la formule [6].

L'exposant m varie de 0,28 à 0,69; mais pour les deux cas de fluage correspondant à des états stables, on remarque qu'il vaut 0,52 et 0,56.

A l'état recuit à 530°, on a suffisamment de mesures pour pouvoir constater que la vitesse stationnaire de fluage est proportionnelle à la charge; le coefficient de proportionnalité est de 32 . 10⁻⁵/jour par kg/mm². A l'état recuit à 550°, la vitesse stationnaire est un peu plus

forte que ne l'indiquerait ce coefficient de proportionnalité; et à l'état brut, beaucoup plus forte.

On voit donc que, mieux encore que l'acier sorbitique étudié plus haut (H), le verre pyrex, au moins à l'état recuit et stable, possède un comportement rhéologique du type visqueux linéaire et réversible, avec composante transitoire parabolique d'exposant voisin de 1/2.

K) Rhodoïd

Quelques éprouvettes de modèle ordinaire (32 mm de longueur de partie cylindrique) ont été usinées dans du rhodoïd et essayées à 30° dans une machine T. R., sous des charges de 400 et 500 kg/mm².

Les courbes de fluage sont parfois irrégulières, avec des oscillations indiquant un matériau pas tout à fait stable. Mais on a obtenu quelques bonnes courbes, *paraboliques*,

dont on a tiré les observations rassemblées au tableau XIII.

Pour les courbes de fluage, les exposants m sont de l'ordre de 0,3, sauf dans un cas; on ne voit pas apparaître de second terme réaccléré.

Les courbes de recouvrance, au moins dans les portions enregistrées sont également paraboliques, et très sensiblement symétriques de la courbe de fluage (sauf pour l'éprouvette qui

a un exposant m plus fort que les autres). Le raccourcissement instantané est égal à l'allongement à la mise en charge; tous deux ont des valeurs considérables, correspondant à un module très faible.

Une matière plastique comme le rhodoïd montre donc à l'ambiante un fluage transitoire important, parabolique, à peu près complètement réversible, et sans fluage secondaire sensible.

TABLEAU XIII

N° éprouvette	σ_0 kg/mm ²	Allongem. instant.	FLUAGE		Raccourc. instant.	RECOUVRANCE	
			m	a *		m'	a' *
1	0,500	0,51 %	0,31	13,1	0,51 %	0,32	11,5
2	0,300	0,2 %	0,58		?	0,18	
3	0,400	?	(0,25)		?	(0,25)	
4	0,400	0,33 %	0,29	7,2	0,31 %	0,26	9

* Unités arbitraires, les mêmes dans tous les cas.

II. — ESSAIS DE TORSION CYCLIQUE

Nous allons maintenant passer en revue les résultats d'essais de torsion cyclique effectués à l'aide des divers appareils décrits au chapitre troisième : la plupart ont été obtenus à l'hystérésigraphe Chevenard, d'autres à l'ambiante, sur une machine de torsions alternées système Chevenard; dans ces deux appareils, on impose une torsion sinusoïdale. C'est, par contre, un couple sinusoïdal qui est imposé sur l'hystérésigraphe Boulanger, qui a été utilisé sur quelques aciers pour enregistrer des cycles à très haute température.

Quand on fait démarrer l'appareil, les premiers cycles couple-torsion enregistrés ne se superposent pas; il y a une période d'accommodation qui peut durer plus ou moins longtemps, disons une dizaine de cycles. Dans tout ce qui suit, nous nous occuperons de cycles stabilisés, après accommodation, sauf dans un cas (acier sorbitique) où nous étudierons spécialement la période d'accommodation.

Rappelons, d'après ce que nous avons dit, au chapitre premier, que l'on a l'habitude de distinguer un peu schématiquement deux types de cycles couple-torsion :

— cycles à sommets pointus, pour des matériaux « à frottement solide »; la forme de

ces cycles est en principe insensible à la fréquence *;

— cycles à sommets arrondis, pour des matériaux « à frottement visqueux »; à la limite, ces cycles sont elliptiques; leur forme varie beaucoup avec la fréquence, l'enflure des cycles (liée à l'amortissement) passant en principe par un maximum pour une fréquence déterminée.

En exposant les observations faites sur divers matériaux, nous allons voir que les cycles réels se placent entre ces deux types extrêmes, en une graduation plus ou moins continue.

A) Aluminium

1° Métal recuit.

Des fils d'aluminium raffiné (il s'agit d'un métal un peu moins pur que A II, titrant 99,95 %) de diamètre 0,6 mm, ont été essayés

* Le qualificatif « sommet pointu » s'applique au cas d'une sollicitation à vitesse continûment variable, par exemple sinusoïdale, où la vitesse est nulle lorsqu'on atteint l'élongation maximale : on peut en effet imaginer une sollicitation « en dent de scie », où la vitesse change brusquement de signe à chaque sommet (accélération quasi infinie). On peut montrer dans ce cas que même un corps visqueux donne des cycles à sommets pointus.

à l'état recristallisé (tréfilé et recuit à 300°) sur hystérésigraphe Chevenard, à 25°, 100°, 200° et 300°.

A 25°, les cycles sont bien à sommets pointus, et la courbe de détorsion au début à la pente correspondant aux valeurs connues du module de Coulomb (fig. 30). On se trouve donc bien dans un cas de « frottement solide ». Cependant la forme des cycles n'est pas complètement indépendante de la vitesse; la hauteur des cycles varie un peu avec la vitesse, comme le montre la figure 32. Des formes tout à fait semblables ont été obtenues sur des fils à grains plus gros (recuits à 450°).

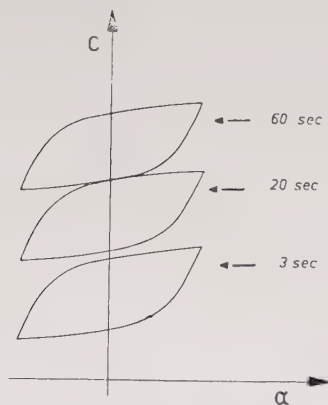


FIG. 30

Cycles couple-torsion d'aluminium raffiné (A II) recuit, enregistrés à 25 °C pour différentes périodes.

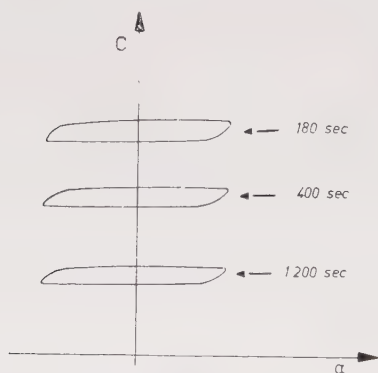


FIG. 31

Comme 30, à 300 °C.

Pour les températures plus élevées, on obtient des cycles plus aplatis (couplex maximaux moins forts) comme le montre la figure 32; on voit que la variation de la hauteur du cycle en fonction de la vitesse est d'autant plus marquée que la température est élevée. Les sommets des cycles ne sont plus

aussi pointus; un arrondi apparaît, surtout visible à 300° (fig. 31). Ceci indique l'intervention d'un fluage visqueux.

En reportant les hauteurs des cycles obtenus en fonction du logarithme de la période, à diverses températures, on obtient les courbes de la figure 32. On remarque que ces courbes sont sensiblement rectilignes, ce qui signifie

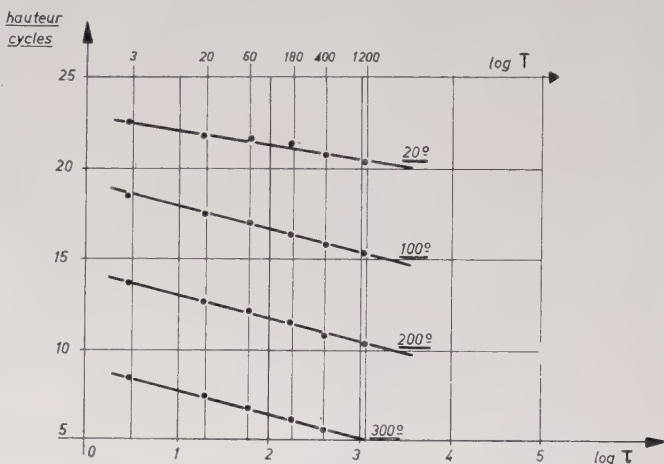


FIG. 32

Aluminium A II : variation de la hauteur des cycles avec la période (τ) à différentes températures (hauteur en mm sur l'enregistrement, τ en secondes).

que, pour une déformation donnée, la contrainte est fonction linéaire du logarithme de la vitesse de déformation v .

$$\sigma(\alpha, v) = a(\alpha) + b(\alpha) \log v \quad [46]$$

On peut calculer l'énergie d'activation apparente du processus de fluage qui fait varier la hauteur des cycles. Moyennant une petite extrapolation de la courbe obtenue, à 100° par exemple (qui est sensiblement parallèle à celle de 200°) on constate en effet qu'un cycle décrit en 20 000 s environ à 100° aurait la même forme que le cycle décrit en 3 s à 200°. On en déduit, par application de la formule d'Arrhenius, une énergie d'activation :

$$U = 4,6 \log \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \times \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = 31\,000 \text{ cal/mole.}$$

Cette valeur est égale à celle observée plus haut (I, A, 4°) pour le fluage sous charge constante d'aluminium pur recristallisé; ce qui permet d'identifier à un fluage normal le phénomène qui produit la variation de forme des cycles avec la vitesse et la température.

Nous avons vu plus haut qu'on pourrait mesurer le module à la détorsion, à 25°, et qu'il était sensiblement égal au module de Coulomb. Comme on connaît la variation de ce module élastique de l'Al pur avec la température ⁴², on peut en déduire la constante élastique théorique, k_1 , de l'éprouvette à 300°. Par mesure de la tangente aux cycles en divers points et application de la formule [10 bis] (chapitre troisième), on peut alors calculer la vitesse de relaxation et tracer des courbes ou « cycles de vitesse de relaxation » donnant la vitesse de relaxation (ou de fluage V) en fonction du couple C .

Il est intéressant de tracer ces courbes en coordonnées réduites (V/V_0 , C/C_0), en appelant V_0 et C_0 les valeurs maximales de ces variables atteintes au cours d'un cycle. La figure 33 montre de tels cycles pour l'aluminium raffiné

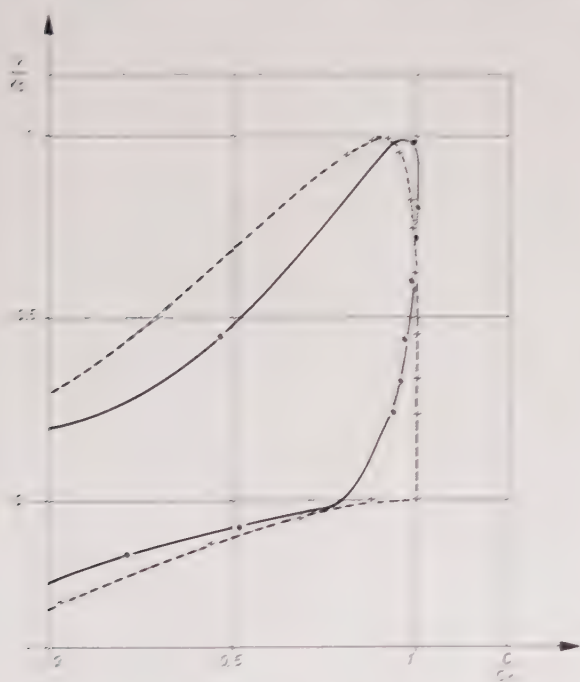


Fig. 33

à 25° (courbe en trait plein) et à 300° (points et trait en pointillés) pour une période 180 secondes.

à 25° (les cycles de vitesse de relaxation calculés pour diverses périodes sont pratiquement superposés) et à 300°, pour une période de 180 secondes.

On trouve que V_0 varie, en fonction de la fréquence, comme $\omega^{0,33}$, c'est-à-dire très sensiblement comme ω ; ce qui signifie simplement

que la forme des cycles enregistrés varie peu avec la vitesse. La forme des cycles de vitesse de relaxation (fig. 33) traduit la superposition de deux effets :

— une forme générale en S; ce qui signifie que la loi reliant la vitesse du fluage à la contrainte n'est pas linéaire, mais à croissance accélérée;

— par rapport à cette loi, une hystérèse qui enfle le cycle.

Cette forme assez compliquée incite à essayer de décomposer le fluage en deux termes, obéissant chacun à des lois plus simples. Nous avons fait dans ce sens deux tentatives.

a) On admet que des cycles décrits à vitesse extrêmement grande ne se réduiraient pas à une droite double, mais que le métal serait le siège d'une déformation plastique « instantanée », qui donnerait un cycle à sommet pointu; le cycle le plus rapide enregistré à 25° en donnerait une approximation. Sa pente en chaque point définirait le « module plastique » dont il a été question au chapitre troisième (III, B). Un cycle décrit à 300° par exemple résulterait de la superposition de cette plasticité instantanée et d'un fluage qui aplatit le cycle; on peut calculer la vitesse de fluage correspondante en mesurant en chaque point la pente du cycle $\frac{dC}{d\alpha}$ et en opérant par différence comme il a été expliqué au chapitre troisième (formule [13]). En opérant ainsi, on obtient des cycles de vitesse de fluage de formes très compliquées, ne traduisant manifestement pas un phénomène simple.

b) On admet que l'aplatissement général de la forme des cycles, quand on fait croître la période ou la température, résulte d'un phénomène de fluage à énergie d'activation de l'ordre de 31 000 cal/mole, calculée plus haut; mais on admet que ce fluage correspondrait à des glissements bloqués, qui donneraient des cycles à sommets pointus; c'est ce que nous avons appelé au chapitre premier (tableau I) « comportement plastique pur ». L'arrondissement des sommets serait dû à la superposition d'un autre phénomène, fluage visqueux indépendant ou « déblocage » des glissements; on peut parler dans ce cas de « comportement visqueux ou de viscosité ».

Cette manière de voir est plausible. Mais sa vérification expérimentale se heurte à de grosses difficultés, car l'arrondi des sommets est faible, et ne se prête pas à une analyse fine.

Tout ce que l'on peut remarquer, avec toutes les réserves qu'impose l'imprécision des enregistrements, c'est que l'arrondi des sommets devient visible à 200° entre les cycles en 180 et 400 s, et à 300° entre ceux en 20 et 60 s. Cette remarque semble indiquer que le fluage « visqueux » prendrait une importance égale pour des couples vitesse-température de (v , 473 °K) et ($8v$, 573 °K); on en déduit par la formule d'Arrhénius une énergie d'activation de 11 000 cal/mole, donc très différente de celle du comportement « plastique ». Il faut toutefois remarquer que les contraintes ne sont pas les mêmes dans les deux cas.

2° Métal écroui.

L'écrouissage modifie la forme des cycles en les aplatissant dans leur ensemble *tout en favorisant l'apparition de sommets arrondis*, donc de la « viscosité » au détriment de la « plasticité ».

Ainsi un fil d'aluminium pur (AII) de 0,5 mm de diamètre, recuit à 400°, puis tréfilé de 0,5 à 0,4 mm, donne à l'ambiante et à 100° des cycles s'approchant d'une forme elliptique (fig. 34, cycles à 100°), d'autant plus redressés que la période est courte. La figure 35 montre

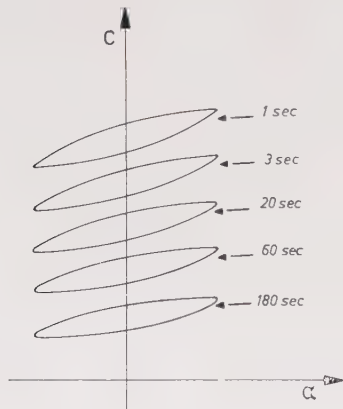


FIG. 34

Aluminium A II écroui. Cycles couple-torsion à 100° pour diverses périodes.

les cycles de vitesse de relaxation élaborés à partir des cycles enregistrés; ils sont plus enflés que ceux de la figure 33, et les cycles obtenus pour deux périodes (20 et 180 s) se superposent. Sur la même figure a été reproduite la courbe de vitesse de relaxation obtenue par élaboration du premier cycle, à partir de l'origine (période d'accommodation).

On observe que les cycles obtenus à 20° en 180 s et à 100° en 3 s sont exactement superposables. On en déduit que l'énergie d'activation du mécanisme de fluage provoquant la formation de ces cycles vaut 11 000 cal/mole. Il semble bien qu'il s'agisse là de la même « viscosité » qui provoquait l'arrondissement des sommets en 1°.

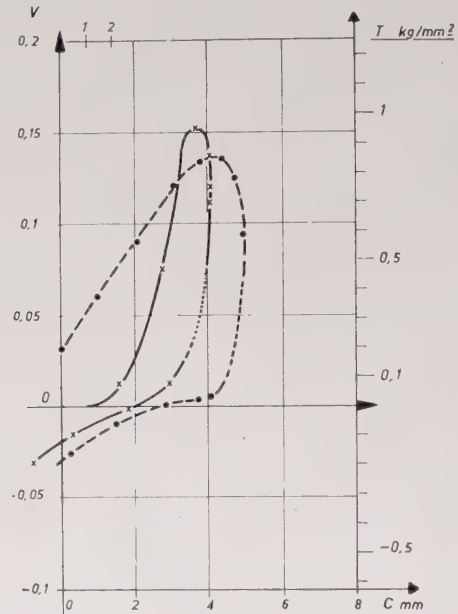


FIG. 35

Points et pointillés : cycles vitesse de fluage-couple pour deux cycles de la figure 34 (20 et 180 secondes). En trait plein, même élaboration pour le premier cycle.

Avec un fil brut de tréfilage, à l'ambiante, on obtient à grande vitesse (2 cycles/s) une droite double; et pour un cycle en 180 s une forme ouverte représentée sur la figure 36, avec sommets arrondis. Il n'y a donc plus dans ce cas de plasticité, mais seulement de

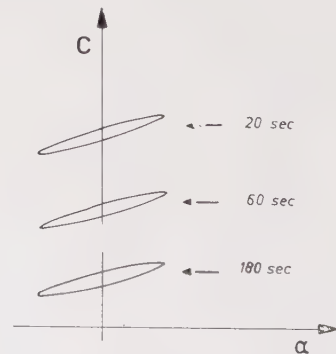


FIG. 36

A II très écroui. Cycles couple-torsion à 20° pour diverses périodes.

la viscosité. La forme des cycles de relaxation élaborée dans ce cas est beaucoup plus proche d'une ellipse (cf. fig. 37, où il s'agit d'un essai comparable, à l'ambiante, sur machine de torsions alternées système Chevenard, sur éprouvettes usinées dans une barre brute de tréfilage et fatiguée au préalable par 500 cycles,

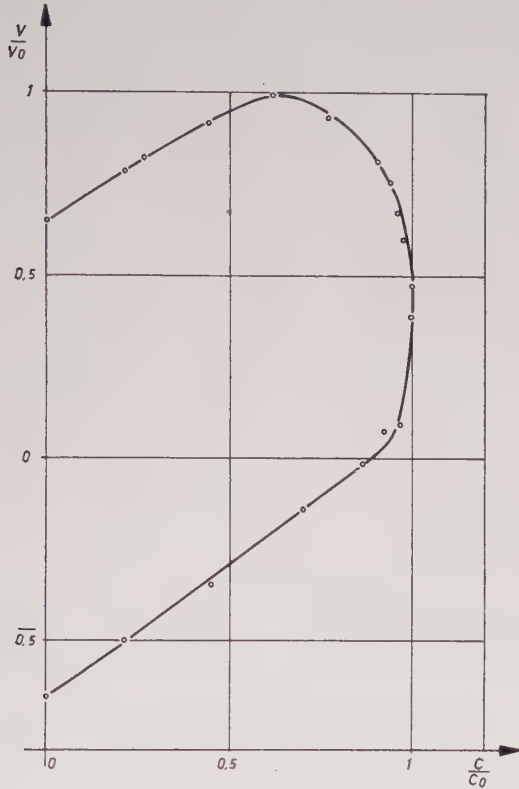


FIG. 37

Cycle vitesse de fluage-couple correspondant à un cycle de la figure 36.

ce qui ne peut que développer un peu la tendance à la « viscosité »); le comportement du métal fortement tréfilé est donc encore plus visqueux. Or le calcul montre que, à 4 % près, la contrainte maximale (cisssion de 4 kg/mm²) est égale dans ce cas à celle obtenue sur le fil recuit de la figure 30, où le cycle est pourtant à sommets bien pointus; ce qui prouve qu'un *écrouissage obtenu par tréfilage augmente fortement la tendance au comportement « visqueux »*.

On peut se demander si cet effet n'est pas dû à ce que la déformation préalable (tréfilage) est exercée dans un sens différent de celui où se fait la déformation au cours de l'enregistrement des cycles (torsion). Pour

trancher cette question, on a enregistré à l'ambiante des cycles sur un fil recuit, puis écroui par un cycle de forte torsion alternée (glissement à la surface : $\pm 10\%$); les cycles obtenus sont à sommets arrondis, et donnent par élaboration des cycles de vitesse de relaxation (fig. 38) intermédiaire entre ceux dus à un tréfilage modéré (de 0,5 à 0,4 mm) et un tréfilage fort (état brut de tréfilage). *Le sens de l'écrouissage préalable ne semble donc pas avoir d'influence déterminante, mais plutôt son importance.*

La tendance au comportement plastique ou visqueux, se traduit dans la loi de variation de la vitesse de fluage avec la fréquence des cycles (ou la pulsation ω). Le calcul montre en effet que V varie sensiblement comme ω^r ; or on trouve pour r les valeurs suivantes :

aluminium recuit (cf. 1°) $r = 0,938$

aluminium écroui par un cycle
à forte torsion ($\gamma_m \pm 10\%$) $r = 0,98$

aluminium écroui par tréfilage
(0,5 - 0,4) $r = 0,95$

aluminium écroui par tréfilage
fort $r = 0,84$

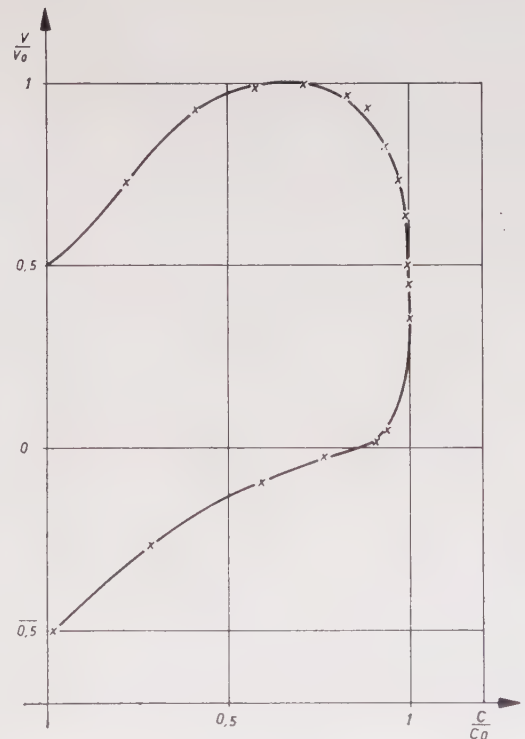


FIG. 38

Cycle vitesse de fluage-couple d'un aluminium A II écroui par torsions alternées.

TABLEAU XIV

N° éprouvette	N° cycle enregistré	α_0 radians*	ω rad./s	ψ	ψ'
2	2	0,0143	3,80	25°	54°
	3	0,0143	0,645	27°	55°
	4	0,0145	0,14	29°	54°
	5	0,0150	0,0052	35°	50°
3	1	0,0069	3,69	17° 1/2	(65° ?)
	2	0,0069	0,74	19°	56°
	3	0,0070	0,15	21°	59°
	4	0,0072	0,0062	24° 1/2	?
	6	0,0064	3,69	17°	63°
6	2	0,0014	0,52	7°	55°
	4	0,0023	id.	11°	59°
	5	0,0047	id.	17°	64°
	6	0,0091	id.	23°	58° 1/2?
	7	0,0124	id.	27°	55°
	8	0,0210	id.	?	?
8	12	0,0315	0,52	35°	47°
	15	0,0324	0,0052	48° 1/2	35° 1/2?

(*) N. B. - 1 radian correspond à un cisaillement maximal de 5 %.

B) Zinc

De nombreux cycles ont été enregistrés à différentes vitesses et amplitudes sur du zinc pur (zinc 99,99 % à grains fins de l'ordre de 0,01 mm²) à la machine de torsion alternée, système Chevenard (chapitre troisième, II, C, 2°), fonctionnant à la température ambiante. A cette température, le zinc a un comportement plutôt « visqueux »; les cycles enregistrés ont une forme presque elliptique.

Aux fortes amplitudes, le cycle est très couché sur l'axe des torsions et la vitesse n'a pratiquement pas d'influence sur son ouverture, tout en agissant sur sa pente moyenne, qui croît avec ω .

Quand l'amplitude décroît, le cycle se redresse en moyenne; la vitesse a une influence un peu plus marquée sur cette pente moyenne (qui croît avec ω) et aussi sur l'ouverture du cycle (qui croît un peu avec la période). Aux très grandes vitesses (1500 t/mn, $\omega = 157$ rad/s) et faibles amplitudes, bien que l'enregistrement soit mauvais, il semble que l'on tende vers une droite double élastique.

L'observation la plus importante à faire sur ces cycles découle de l'élaboration de la vitesse de fluage (ou de relaxation). On trouve

que les cycles de vitesse de relaxation ont une forme indépendante de la vitesse et pratiquement indépendante de l'amplitude (fig. 39). Les points de phases ψ' constantes se déplacent en tournant sur la même courbe. Le

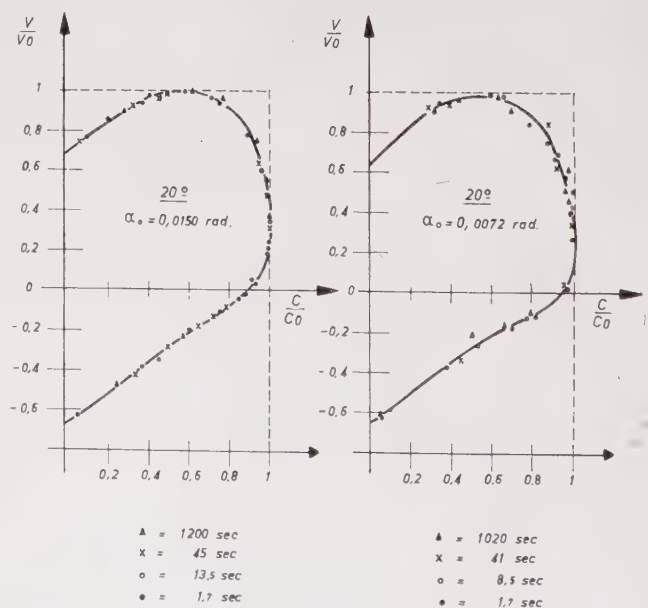


Fig. 39

Zinc à l'ambiante. Cycles vitesse de fluage-couple pour deux amplitudes α_0 et quatre périodes.

meilleur moyen de s'en rendre compte est de voir, pour une sollicitation (torsion)

$$\alpha = \alpha_0 \sin \omega t$$

comment varient le déphasage ψ entre la torsion α et le couple (qui caractérise l'ouverture du cycle couple-torsion; cf. chapitre quatrième) et le déphasage ψ' entre le couple et la vitesse de fluage (qui caractérise l'ouverture du cycle de vitesse de fluage, fig. 39). Ces grandeurs sont reportées au tableau XIV.

On vérifie que ψ (donc l'ouverture du cycle couple-torsion) est peu influencée par la vitesse ω (il croît un peu avec la période), mais croît nettement avec l'amplitude (éprouvettes 6 et 8).

Au contraire, mis à part les très fortes amplitudes (éprouvette n° 8), ψ' est à peu près indépendant de α_0 et ω , ce qui confirme la similitude des cycles (V, C) de la figure 39. La

Vitesse maximale de fluage, V_0 :

$$V_0 = c^{10} \omega^r (\alpha_0 - 0,0005)^{1,23}$$

r est légèrement inférieur à 1 et croît avec α_0 , en prenant les valeurs suivantes :

α , (rad.)	r
0,0014	0,85 environ
0,007	0,96
0,014	0,94

— Couple maximal C_0 .

A ω constant, C_0 varie de telle façon que la pente moyenne du cycle soit liée par :

$$\frac{C_0}{\alpha_0} = C^{10} e^{-\lambda C_0}$$

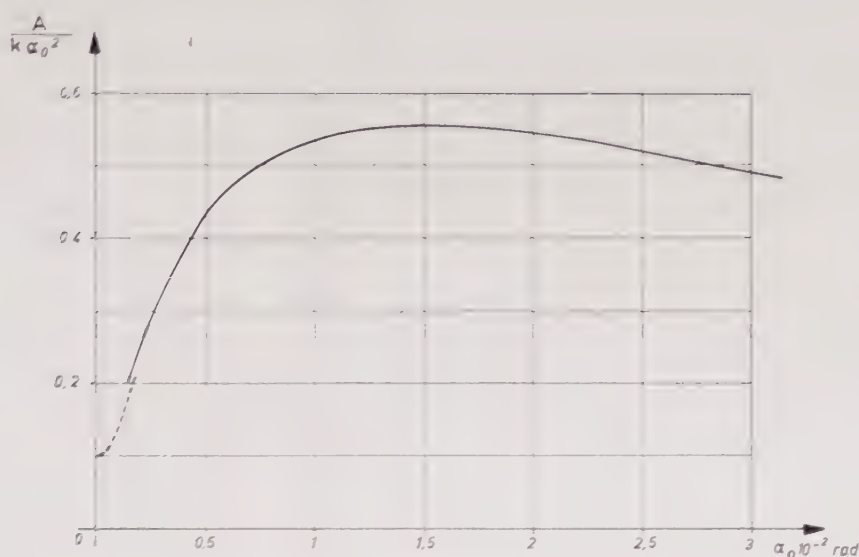


FIG. 40

Zn à l'ambiante : variation du frottement interne en fonction de l'amplitude. En pointillés, d'après des mesures d'amortissement; en traits pleins, d'après des mesures de l'aire du cycle.

vitesse de fluage est presque en quadrature avec α_0 , ($\psi + \psi'$) variant entre 62° et 85° (entre 79° et 85° si l'on exclue les très faibles amplitudes $\alpha_0 < 0,003$).

L'élaboration de ces cycles permet de déterminer empiriquement la variation de quelques grandeurs caractéristiques en fonction de ω et α_0 .

A amplitude constante, C_0 varie peu avec ω :

$$C_0 = C^{10}$$

($s = 0,04$ à $0,06$, selon l'amplitude).

On vérifie avec les chiffres mesurés que la hauteur des cycles sur l'axe des couples vaut bien $C_0 \sin \psi$.

— Aire du cycle couple-torsion.

Si les cycles étaient semblables entre eux, l'aire A varierait comme α_0^2 . Il est donc intéressant d'étudier les variations du rapport

$$\delta = \frac{A}{k_1 \alpha_0^2}$$

écart à la forme elliptique. Pour cela, on trace les courbes représentant les variations de V et de C en fonction du temps (fig. 41).

La courbe $V(t)$ est sensiblement symétrique; elle s'écarte néanmoins d'une sinusoïde simple, mais sa forme a un aspect bien connu :

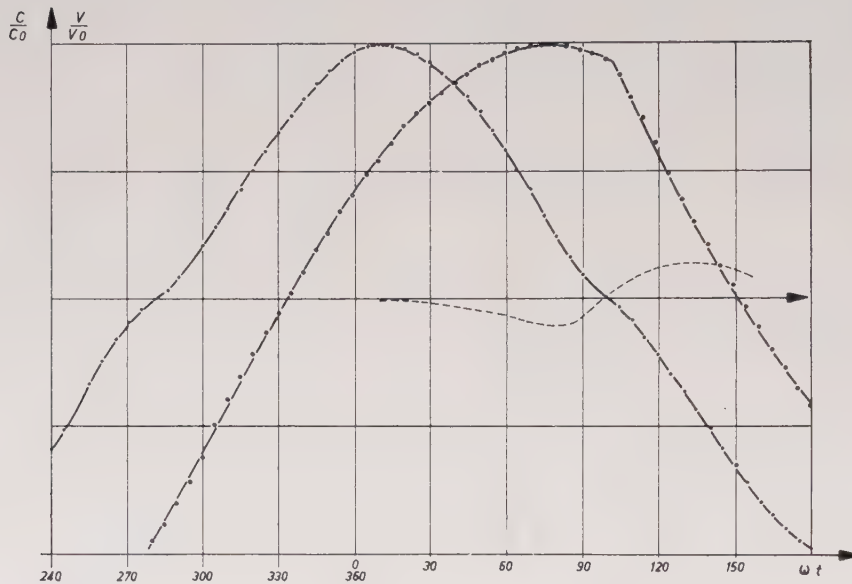


FIG. 41

Zinc à l'ambiante. Elaboration d'un cycle couple-torsion donnant au cours d'un cycle la variation de la vitesse de fluage (courbe de gauche, en points) et du couple (courbe de droite, en cercles). En pointillés, écart entre la courbe de vitesse de fluage et une sinusoïde.

qui représente la fraction d'énergie dissipée par cycle. Dans le cas d'oscillations libres, δ est égal au *décroissement logarithmique* des oscillations. Aussi avons-nous mesuré ce décroissement sur un micropendule de Coulomb, dans le cas de faibles amplitudes initiales. Les valeurs de δ ainsi obtenues, soit par amortissement (faibles amplitudes), soit par mesure des aires A (fortes amplitudes) sont représentées sur la figure 40, pour $\omega = 0,52$ rad./s.

Cette courbe représente aussi les variations de ψ , car pour des cycles elliptiques (ce qui est sensiblement le cas ici) $\delta = \pi \operatorname{tg} \psi$.

On remarque que, même aux faibles amplitudes, l'amortissement est considérable.

Nous avons vu que les cycles de vitesse de fluage de la figure 39 ont une forme qui ne s'éloigne pas beaucoup d'une ellipse. On peut essayer d'analyser de façon plus précise leur

elle résulte de la superposition d'une sinusoïde simple et d'un harmonique d'ordre 3.

$$V = B_1 \sin (\omega t + \psi + \psi') + B_3 \sin 3 (\omega t + \psi + \psi') \quad [47]$$

La courbe $C(t)$ n'est pas symétrique. On peut le prévoir simplement, car la formule [10] permet de calculer facilement $\frac{dC}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= k_1 \left(\frac{d\alpha}{dt} - V \right) \\ &= k_1 \omega \alpha_0 \cos \omega t - B_1 \sin (\omega t + \psi + \psi') \\ &\quad - B_3 \sin 3 (\omega t + \psi + \psi') \end{aligned} \quad [48]$$

d'où par intégration :

$$C = k_1 \alpha_0 \sin \omega t + \frac{B_1}{\omega} \cos (\omega t + \psi + \psi') + \frac{3\omega}{B_3} \cos 3(\omega t + \psi + \psi') \quad [49]$$

Les deux premiers termes de l'expression de C représentent un terme sinusoïdal simple, mais dont l'origine est maintenant décalée par rapport à celle de l'harmonique d'ordre 3; d'où la dissymétrie observée. Cette dissymétrie rend d'ailleurs difficile la mesure exacte de ψ (dans le tableau XIV, ψ est défini par les points où C s'annule).

On voit donc que l'introduction d'un harmonique d'ordre 3 dans la loi de variation de la vitesse de fluage suffit à expliquer la forme des cycles vitesse de fluage-couple.

Le coefficient B_3 de la formule [47] est petit vis-à-vis de B_1 ($B_3 \leq 0,08 B_1$). On peut donc dire que le zinc s'approche du métal « visqueux » idéal à cycle elliptique, l'écart sur la forme des cycles étant faible; mais il présente la particularité que la forme des cycles (déphasage ψ ou décrement δ) varie peu avec la période, ce qui apparenterait plutôt le zinc aux matériaux à comportement « plastique ».

Il faut noter que les contraintes maximales atteintes dans nos essais sont de l'ordre de 1 kg/mm² (cisison).

C) Nickel

Des fils de nickel Wiggin ont été essayés à l'hystérésigraphe Chevenard à des températures variées allant de l'ambiante à 400 °C.

1° Métal recuit.

Des fils ont été essayés à l'ambiante, à 200°, 300° et 400° après avoir subi un recuit à 750° qui, d'après un examen aux rayons X, provoque une recristallisation complète.

Les cycles obtenus à 20° et à 200° sont à sommets pointus à toutes vitesses; leur forme est indépendante de la vitesse (fig. 42).

On note un léger effet d'écrouissage par la répétition des torsions alternées : les cycles obtenus dans les mêmes conditions (α_0 et ω)

après plusieurs essais sont un peu plus redressés que ceux obtenus au premier enregistrement.

A 300°, les cycles décrits à grande vitesse sont encore à sommets pointus, alors que les cycles lents ont des sommets légèrement arrondis. A 400°, les effets sont analogues, mais l'arrondi des sommets est encore un peu plus marqué qu'à 300°, et les cycles plus couchés (fig. 43).

Il est assez remarquable que les cycles rapides (période 1 s) observés à 300° et à 400° sont identiques, et superposables aux cycles décrits à l'ambiante.

L'élaboration des cycles permet de calculer la vitesse de relaxation. Des cycles de vitesse

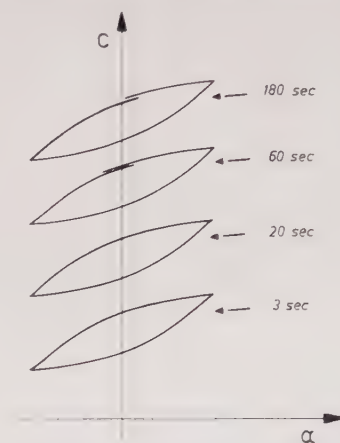


FIG. 42

Nickel recuit. Cycles couple-torsion à 20 °C, pour diverses périodes.

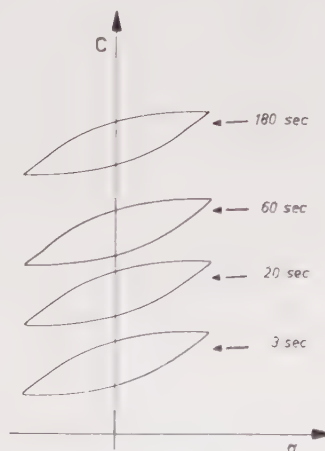


FIG. 43

Nickel recuit. Cycles couple-torsion à 400°, pour diverses périodes.

de relaxation typiques, obtenus à 400° , sont représentés sur la figure 44; la forme de ces courbes est indépendante de la vitesse ω , comme pour le zinc, mais à la différence du cas de l'aluminium. Pour une amplitude $\alpha_0 = 15^\circ$, on trouve que le déphasage entre vitesse de fluage et couple, ψ , est constant (compris entre 35° et 36°) quelle que soit la vitesse ω .

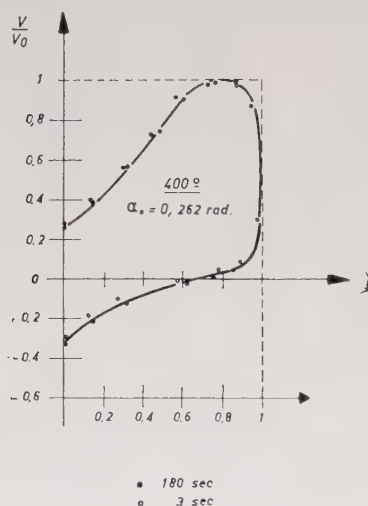


FIG. 44

Cycles vitesses de fluage-couple pour deux des cycles de la figure 43.

En somme, comme dans le cas de l'aluminium, l'ouverture des cycles enregistrés est le résultat de deux phénomènes de fluage :

— un phénomène principal du type « plastique » (sommets pointus) qui, à la différence du cas de l'aluminium, est indépendant de la température, au moins entre 20 et 400° ;

— un phénomène du type « visqueux », plus faible, qui arrondit un peu les sommets vers 300 et 400° , pour les cycles décrits lentement. Ce fluage est trop peu marqué pour que l'on puisse en mesurer la chaleur d'activation.

La prépondérance de la déformation « plastique », indépendante de ω et de la température, se marque dans la loi reliant V_0 (calculé) à ω , $V_0 = C\omega^r$: on trouve en effet, même à 400° , $r = 0,99$, donc très voisin de 1.

2° Métal écroui.

Des fils recuits à $0,5$ mm de diamètre, puis tréfilés de $0,5$ à $0,3$ mm ont été essayés à 300° et surtout à 400° , après maintien de plusieurs heures à la température d'essai (état restauré).

Les cycles à grande vitesse se réduisent presque à une droite double, élastique. Les cycles plus lents sont à sommets arrondis; ils sont sensiblement elliptiques tant que l'amplitude n'est pas trop forte (fig. 45); pour $\alpha_0 = 20^\circ$ et surtout 25° , ils s'écartent un peu de l'ellipse pour ressembler aux cycles enregistrés sur le zinc, et tendent plus vers une forme à sommets pointus.

L'influence de la vitesse sur la forme des cycles est très marquée; ils sont d'autant plus enflés que la période est grande. Mais cet effet est d'autant moins net que l'amplitude α_0 est

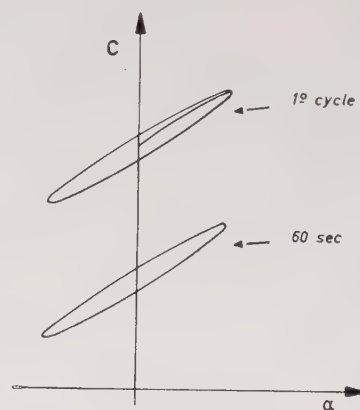


FIG. 45

Nickel écroui. Cycles couple-torsion à 400° . Premier cycle et cycle accommodé.

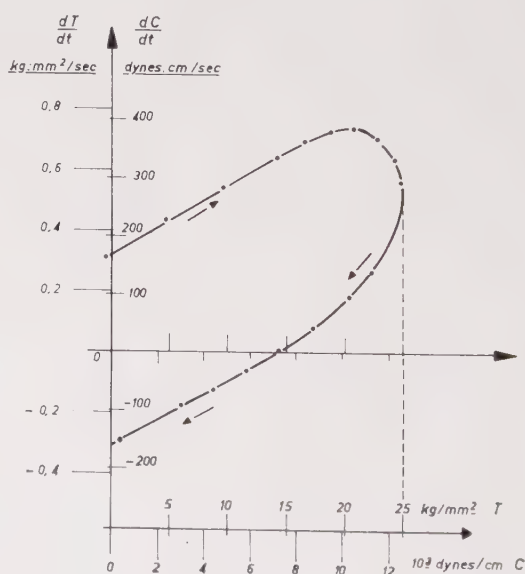


FIG. 46

Cycle vitesse de fluage-couple pour le cycle de la figure 45.

forte. Ceci se traduit dans l'exposant r de la loi $V_0 = C^* \omega^r$ pour :

$$\alpha_0 = 10^\circ, \quad r = 0,63^*$$

$$\alpha_0 = 20^\circ, \quad r = 0,925$$

Les cycles de vitesses de relaxation (V, C) sont presque elliptiques, et leur forme est, ici aussi, indépendante de ω (fig. 46).

La variation de l'enflure des cycles avec ω et α_0 est bien caractérisée par le décrément :

$$\delta = \frac{A}{k_1 \alpha_0^2} \quad (A : \text{aire du cycle})$$

qui prend les valeurs reportées au tableau XV.

TABLEAU XV (valeurs de δ)

Période $\frac{2\pi}{\omega}$	1 s	1,5 s	3 s	20 s	60 s	180 s
α_0						
5°				0,22	0,37	0,51
10°				0,23	0,42	0,56
15°	(0,09)	0,13	0,19	0,32	0,48	0,64
20°				0,54	0,61	0,69
25°				0,80	0,80	0,82

On remarque pour $\alpha_0 = 15^\circ$, et mis à part la première valeur dont la mesure est d'ailleurs peu précise, δ varie comme $\omega^{-0,2}$. D'autre part δ croît nettement avec l'amplitude α_0 , mais cette croissance est moins marquée aux faibles vitesses.

Il y a donc beaucoup de ressemblance entre le comportement du nickel et celui de l'aluminium, ce qui n'est pas étonnant, car il s'agit de deux métaux cubiques à faces centrées. Le comportement de ces deux métaux accuse cependant des différences, car à l'état recuit, le nickel est plus purement « plastique » (indépendant de la vitesse et aussi de la température vers l'ambiante), alors qu'à l'état écroui (tréfilé) il semble plus parfaitement « visqueux » à température supérieure à l'ambiante, car les cycles couple-torsion sont bien elliptiques; cependant l'enflure croît avec l'amplitude.

D) Fer Armco

Un certain nombre de cycles couple-torsion ont été enregistrés à différentes vitesses et à température échelonnées entre l'ambiante et 495 °C, sur une machine de torsion alternée Chevenard, modifiée pour pouvoir être utilisée à haute température. De 20 à 200 °C environ, les cycles sont peu ouverts, et les sommets pointus, pour autant que l'enregistrement permette de le juger; l'ouverture du cycle décroît d'ailleurs quand T croît, et tombe à 0 vers 150-210° (cela dépend de la fréquence*). Au-dessus, l'ouverture des cycles croît avec la température et la période; les cycles ont tendance à avoir un sommet arrondi, sans pour cela être bien elliptiques.

On peut caractériser globalement ce fluage responsable de l'ouverture du cycle à haute température, en le mesurant par exemple par α_1 , corde interceptée par le cycle sur l'axe des torsions (OK sur la figure 5, pour le cas d'un cycle elliptique). On trouve que α_1 croît avec la température et avec la période. Quand on porte α_1 en fonction de ω pour chaque température d'essai en diagramme double logarithmique, on obtient une droite, de pente -0,17, ce qui indique que α_1 varie comme $\omega^{0,33}$. On a tracé ces droites pour les températures 250°, 276°, 304°, 332°, 378°, 418°, 455° et 495°; en dessous de 250°, l'ouverture

* Le minimum, sensiblement nul, est à 150° pour 300 minutes et à 200° environ pour un essai de 4 minutes, ce qui correspond à une énergie d'activation apparente de 34 000 cal/mole. Mais la

des cycles est trop faible pour permettre une mesure précise et leur forme est perturbée par des irrégularités dues au phénomène Portevin-Le Châtelier. Ces droites sont donc parallèles et leur écartement permet de mesurer une énergie d'activation; on trouve 56.000 cal/mole entre 380° et 495°; en dessous de 380°, une certaine irrégularité se manifeste, comme si la chaleur d'activation valait 33.000 cal/mole vers 260°. On peut aussi interpréter l'ensemble des résultats en disant que le mécanisme commandant le fluage obéit en moyenne à une énergie d'activation de 56.000 cal/mole, avec intervention d'un phénomène perturbateur entre 275° et 350 °C.

Comme dans le cas de l'aluminium dans un domaine de température comparable, l'énergie d'activation est un peu plus faible que celle d'autodiffusion.

Cette valeur est à rapprocher de celle de 76.000 cal/mole trouvée vers 600° à l'hystérésigraphe Boulanger pour des cycles de beaucoup plus faible amplitude²⁷; dans ce dernier cas, on sait d'ailleurs qu'il s'agit de fluage visqueux dû aux joints de grains. Le fluage sous charge constante (1 à 3 kg/mm²) obéit à une énergie d'activation beaucoup plus forte, mesurée par la méthode de Dorn⁴³ et comprise entre 90.000 et 100.000 cal/mole.

E) Acier sorbitique (45 NCD 17). Coulée II

Des fils de l'acier sorbitique essayé en fluage ont été utilisés pour des enregistrements à l'hystérésigraphe Chevenard, après avoir subi un traitement thermique en tubes scellés reproduisant celui des grosses éprouvettes de fluage. Malgré les températures d'essai élevées (460, 480, 500, 540, 580 et 620 °C), les fils ne s'oxydent presque pas, grâce à la présence de chrome dans l'acier. On vérifie d'ailleurs, sur un fil porté quelques heures à 620°, qu'on obtient avant et après maintien à cette température des cycles superposables, ce qui montre que la faible oxydation qui se produit à chaud n'a pas d'influence sur les propriétés mécaniques.

Les cycles couple-torsion enregistrés présentent plusieurs caractères intéressants :

- ces cycles sont très sensiblement elliptiques (fig. 47), se réduisant à une droite double vers 500° aux grandes vitesses;

- pour une température et une vitesse données, la forme des cycles est assez sensible-

ment indépendante de l'amplitude, et cela jusqu'à l'amplitude maximale utilisée, qui correspond à des contraintes maximales (cissions à la surface du fil) d'environ 10 kg/mm².

Le comportement de ce métal résulte donc d'une viscosité à peu près linéaire. Par contre, δ varie peu avec la fréquence.

Le calcul d'une énergie d'activation se heurte à quelques difficultés⁴⁹, car les courbes représentant, à température constante, la variation du frottement interne δ et du couple maximal C_0 avec ω ne sont pas droites, et même certaines d'entre elles se croisent, si on opère par température croissante; c'est là sans doute la manifestation de modifications de structure au chauffage (remises en solution de carbures ?). Si on opère par températures décroissantes, on obtient des résultats beaucoup plus réguliers. On peut alors caractériser le fluage (visqueux) par l'ouverture d'un cycle, mesurée par α_1 comme dans le cas du fer Armco.

On trace alors le réseau des droites de la figure 48, donnant, comme pour le fer Armco, α_1 en fonction de ω à différentes températures.

On remarque d'ailleurs que deux cycles ayant même α_1 (par exemple un cycle décrit à une certaine température en 4 s et un autre décrit 40° plus bas en 40 s) ont aussi même pente moyenne, c'est-à-dire sont exactement superposables. Autrement dit, leur forme ne dépend que d'un paramètre complexe faisant intervenir la fréquence et la température. Comme les droites de la figure 48 sont parallèles (et de pente $-0,21$, ce qui signifie que α_1 varie comme $\omega^{0,21}$), on peut déduire de leur écartement une *énergie d'activation vraie qui vaut 78 000 cal/mole*. Cette valeur est très voisine de la valeur 73.000 trouvée pour le fluage primaire sous 15 kg/mm² (cf. I, H).

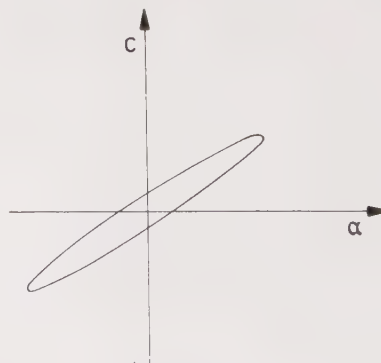


FIG. 47

Acier 45 NCD 17. Cycle couple-torsion à 585 °C pour une période de 12 minutes.

Il est intéressant de rapprocher cette énergie d'activation de celle du fluage dû aux joints de grains dans le fer Armco vers la même température, et qui était de 74 000 cal/mole⁴³. L'ensemble de ces valeurs est plus fort que celui trouvé pour les cycles couple-torsion de fer Armco vers 400° (56 000 cal/mole) mais plus faible que celui du fluage du fer Armco vers 600°⁴³ déterminé par la méthode de Dorn et qui était de 94 000 cal/mole.

Cherchons maintenant l'influence de la fréquence (ou de ω) sur le fluage visqueux. On peut d'abord remarquer que α_1 caractérise le déphasage ψ entre couple et torsion, car $\alpha_1/\alpha_0 = \sin \psi$ (fig. 50). On peut, d'autre part, mesurer le module élastique sur les cycles décrits à grande vitesse à 520° et qui sont com-

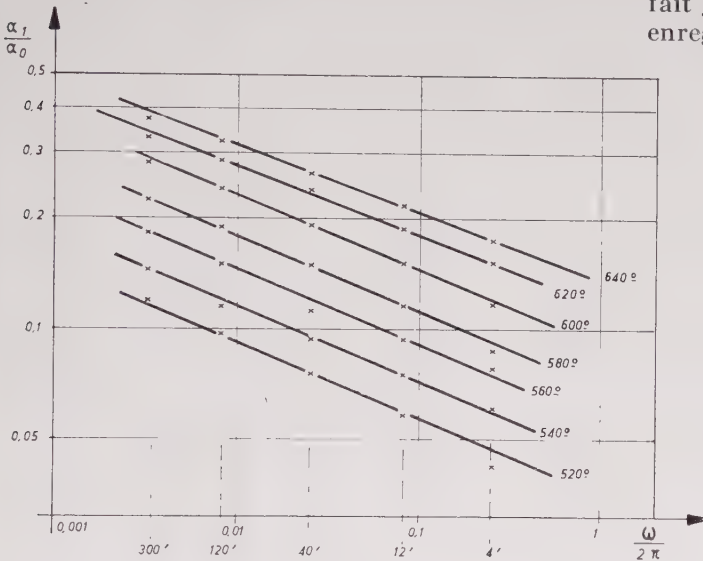


FIG. 48

Acier 45 NCD 17. Variation de l'ouverture du cône en fonction de la fréquence, à différentes températures.

plètement aplatis et tracer (fig. 50), la droite OP avec cette pente; le point d'intersection P avec le cycle est le point où la vitesse de fluage est maximale, car il se trouve en quadrature avec le point Q (tangente égale au module non relaxé) où elle s'annule. Le déphasage $\psi + \psi'$ entre V et α est donc tel que :

$$\alpha_p/\alpha_0 = \cos(\psi + \psi').$$

Ces relations permettent de calculer ψ' . On trouve que les valeurs s'échelonnent entre celles correspondant aux vitesses extrêmes :

	ψ	ψ'
Cycles lents	21°	63° 1/2
Cycles rapides	11° 1/2	65°

On voit que ψ' est très sensiblement indépendant de ω , ce qui correspond à la loi de similitude des cycles (V, C) observés sur le nickel et l'aluminium écroui. D'autre part, il existe une relation entre V_0 , ψ , ψ' et ω (cf. annexe III, formule [A 60]).

$$\text{Soit } \alpha_1 = \alpha_0 \sin \psi = \frac{V_0}{\omega} \cos \psi'$$

Or nous venons de voir que α_1 varie comme $\omega^{-0,21}$ et que ψ' est constant. On en déduit que V_0 varie comme $\omega^{0,79}$, loi qui se rapprocherait de celle du nickel écroui pour mêmes amplitudes.

Courbe d'accommodation.

Au lieu de considérer, comme nous l'avons fait jusqu'ici, des cycles accommodés, on peut enregistrer toute la courbe d'accommodation,



FIG. 49

Acier 45 NCD 17.

Courbe d'accommodation à 600 °C pour une période de 40 secondes.

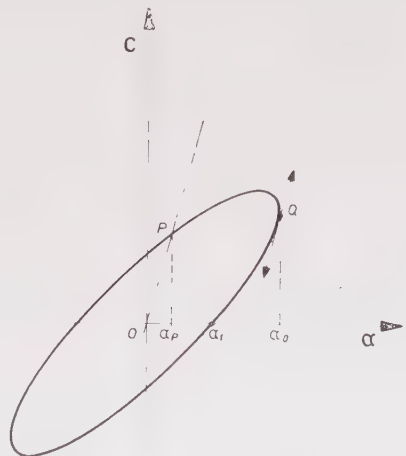


FIG. 50

Forme des cycles couple-torsion pour un nical D à 1300°. OP, pente du module non relaxé.

en partant à $t = 0$ du fil au repos et en faisant osciller la torsion entre 0 et $2\alpha_0$ (fig. 49).

Pour élaborer ces courbes, nous avons utilisé la méthode suivante :

En appelant θ la période, la courbe coupe l'axe des couples des cycles accommodés (verticale $\alpha = \alpha_0$ passant par le centre des cycles) au temps successifs :

$$\frac{\theta}{4}, \frac{3\theta}{4}, \frac{5\theta}{4}, \frac{7\theta}{4}, \dots$$

Appelons les points d'intersection correspondants :

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \dots$$

Les points impairs $A_1, A_3 \dots A_{2n+1}$ correspondent aux intersections obtenues par valeurs croissantes de α , et les points $A_2, A_4 \dots A_{2n}$ à celles par valeurs décroissantes.

Quand $n \dots \infty$, les points A_{2n} , d'une part, et A_{2n+1} , d'autre part, tendent vers une limite, qui définit le cycle accommodé. En tout point de la courbe d'accommodation, l'écart vertical (en couple) entre cette courbe et le cycle accommodé définit la terme d'accommodation en relaxation, soit $y(t)$.

Nous nous proposons de calculer ce terme $y(t)$ par une méthode différentielle, qui ne fasse pas intervenir les positions asymptotiques finales, A_{2n+1} et A_{2n} . Pour cela on remarque que :

$$A_1 A_3 \text{ représente } y\left(\frac{5\theta}{4}\right) - y\left(\frac{\theta}{4}\right)$$

$$A_3 A_5 \text{ représente } y\left(\frac{9\theta}{4}\right) - y\left(\frac{5\theta}{4}\right)$$

$$A_2 A_4 \text{ représente } y\left(\frac{7\theta}{4}\right) - y\left(\frac{3\theta}{4}\right)$$

$$A_4 A_6 \text{ représente } y\left(\frac{11\theta}{4}\right) - y\left(\frac{7\theta}{4}\right)$$

Chacun de ces termes est sensiblement égal à $\theta \cdot y'(M)$, où $y'(M)$ représente la valeur de la dérivée au point milieu de l'intervalle considéré; par exemple $A_1 A_3 \approx \theta \cdot y'(A_2)$. La mesure des segments $A_1 A_3, A_2 A_4, A_3 A_5$, etc., donne donc directement une mesure de la dérivée du terme d'accommodation, ou plus exactement de $2f(t) = \theta \cdot y'(t)$.

Or, en portant $\log f(t)$ en fonction de $\log t$ pour les points successifs $\frac{3\theta}{4}, \frac{5\theta}{4}, \frac{7\theta}{4}, \dots$, on obtient* pour les cycles décrits à même température et à vitesses différentes, de très bonnes droites parallèles, ce qui veut dire que l'on peut écrire :

$$f(t) = -K \cdot t^{-(\mu+1)} \quad [50]$$

donc :

$$y(t) = \frac{2K}{\mu\theta} \cdot t^{-\mu} = \frac{K\omega}{(\mu)\pi} \cdot t^{-\mu} \quad [51]$$

si μ est positif, et si μ est négatif :

$$y(t) = y_0 - \frac{K\omega}{|\mu|\pi} t^{(\mu)} \quad [51 \text{ bis}]$$

Le tableau XVI donne les valeurs de μ , K et $\frac{2K}{\theta\mu}$ pour diverses vitesses et températures. A 520° , le terme d'accommodation est parabolique (formule [51 bis] et d'exposant très faible ($\mu = 0$ correspondrait à une courbe logarithmique).

Pour toutes les autres températures, μ est positif, et le terme d'accommodation est hyperbolique (formule [51]). Dans ce cas, la loi indiquée n'est plus valable tout près de l'origine.

L'exposant μ croît avec la température. La dispersion empêche de déterminer avec certitude la loi de cette variation, mais une loi linéaire représente une bonne approximation :

$$\mu = 0,007 (T - 520), T \text{ en } ^\circ\text{C} \quad [52]$$

Le coefficient $\frac{2K}{\theta\mu}$ décroît quand ω croît, sauf à 520° où il est presque constant et plutôt croissant faiblement avec ω . En traçant les courbes $\log\left(\frac{2K}{\theta\mu}\right)$, $\log \omega$, on trouve ici encore de très bonnes droites, c'est-à-dire que :

$$\frac{2K}{\mu\theta} = B(T) \cdot \omega^{-\nu(T)} \quad [53]$$

On trouve pour l'exposant ν les valeurs portées au tableau XVII.

(*) Essais et mesures effectués par M. R. Tamhankar

TABLEAU XVI

$\begin{array}{c} \omega \\ \text{ou} \\ \theta \end{array} \quad T^{\circ}\text{C}$	520	560	600	620	640
$\omega = 1,57$ $\theta = 4 \text{ s}$	$\mu = -0,06$ $K = 5,67$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 40,5$	$\mu = 0,37$ $K = 16,1$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 20,5$	$\mu = 0,57$ $K = 35$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 31$	$\mu = 0,74$ $K = 56$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 38$	$\mu = 0,77$ $K = 67$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 42$
$\omega = 0,523$ $\theta = 12$	$\mu = -0,07$ $K = 15,43$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 36,5$	$\mu = 0,36$ $K = 70$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 31,5$	$\mu = 0,57$ $K = 161$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 47$	$\mu = 0,74$ $K = 301$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 68$	$\mu = 0,80$ $K = 336$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 70$
$\omega = 0,157$ $\theta = 40$	$\mu = -0,07$ $K = 51,2$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 40$	$\mu = 0,36$ $K = 342$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 46$	$\mu = 0,57$ $K = 887$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 74$	$\mu = 0,74$ $K = 1\,917$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 129$	$\mu = 0,81$ $K = 2\,157$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 135$
$\omega = 0,105$ $\theta = 60$	$\mu = -0,07$ $K = 65,3$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 31$	$\mu = 0,38$ $K = 463$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 41,5$	$\mu = 0,58$ $K = 1\,380$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 80,5$	$\mu = 0,75$ $K = 3\,483$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 157$	$\mu = 0,80$ $K = 3\,865$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 160$
$\omega = 0,0523$ $\theta = 120$	$\mu = -0,07$ $K = 132$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 31,5$	$\mu = 0,37$ $K = 1\,067$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 48$	$\mu = 0,58$ $K = 3\,390$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 99$	$\mu = 0,73$ $K = 8\,960$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 202$	$\mu = 0,80$ $K = 10\,230$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 212$
$\omega = 0,0209$ $\theta = 300$	$\mu = -0,07$ $K = 349$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 33$	$\mu = 0,38$ $K = 3\,119$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 58,5$	$\mu = 0,57$ $K = 10\,100$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 118$	$\mu = 0,74$ $K = 23\,250$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 211$	$\mu = 0,80$ $K = 40\,000$ $\frac{2K}{\mu\theta} = 333$
$\mu \text{ moy.}$	$-0,07$	$0,37$	$0,57$	$0,74$	$= 0,80$

TABLEAU XVII

$T^{\circ}\text{C}$	520	560	600	620	640
ν	$-0,05$	$0,24$	$0,36$	$0,43$	$0,49$
B	38	27	37	50	53

On remarque que ν varie comme μ ($\nu = 0,6\mu$), et que B varie peu avec la température.

On peut donc écrire en définitive la loi [51] sous la forme :

$$y(t) = B \omega^{-0,6\mu} \cdot t^{-\mu} \quad [54]$$

où μ croît linéairement avec la température selon la loi [52] et B est sensiblement constant

et de l'ordre de 40 (en prenant pour unité de mesure des couples 1 mm sur l'enregistrement photographique). Si l'on veut raffiner l'étude des variations de B on peut mettre à part le cas de 520° (courbe parabolique); pour les autres valeurs, B croît avec T, et double de valeur quand on passe de 560 à 640 °C, ce qui correspondrait à une énergie d'activation ap-

parente de 16 000 cal/mole. Mais la variation de l'exposant μ avec la température enlève tout sens physique à l'énergie ainsi déterminée.

Il y a donc des différences formelles entre le terme d'accommodation et le fluage du cycle accommodé, qui, comme nous l'avons vu, semble bien dépendre d'un seul processus activé. On remarquera néanmoins que, vers 560°, au moins, l'influence de ω sur le fluage du terme d'accommodation, qui s'exprime par une loi en $\omega^{-0,24}$, est très proche de la loi en $\omega^{-0,21}$ que nous avons trouvée pour la variation de l'ouverture α_1 du cycle accommodé (fig. 48).

F) Acier au Si et Nicral D

Des cycles couple-torsion ont été enregistrés sur hystérésigraphe Boulanger pour ces deux métaux, notamment vers 1 200-1 300°, pas loin du point de fusion. A ces températures élevées, les cycles, même avec la très faible amplitude utilisée ici, sont nettement enflés et bien elliptiques; leur forme (déphasage entre couple et torsion ou frottement interne) est sensiblement indépendante de l'amplitude. On est donc dans un cas de *viscosité linéaire*.

On peut mesurer le module non relaxé sur les oscillations libres à 100 ou 150° plus bas (où le cycle est assez près d'une droite double) et l'extrapoler aux températures envisagées. La pente correspondante et l'ouverture des cycles est assez bien représentée par la figure 50: le point Q où la tangente au cycle est parallèle au module non relaxé n'est pas sur l'axe $O\alpha$; autrement dit il y a déphasage entre la vitesse de fluage et le couple; même à ces températures très élevées, *les métaux se comportent, non comme un liquide de Maxwell, mais comme un modèle à module relaxé non nul*, ce qui exclut le fluage de Herring-Nabarro comme cause de la viscosité observée. A ouverture égale, l'ellipse est plus couchée pour le Fe-Si, qui se rapproche donc plus d'un « liquide ».

Un modèle de Boltzmann simple convient-il pour représenter le comportement observé? Il faudrait pour cela pouvoir vérifier que le frottement interne suit en fonction de la fréquence une variation du type [35]. La variation de δ (ou $\text{tg } \psi$) en fonction de T pour trois fréquences est représentée figure 51 pour le fer-silicium; pour le nicral D, les courbes correspondantes ressemblent à celles données ailleurs²⁷ pour un inoxydable 18-8: la montée de δ est plus progressive, les courbes plus écartées et la chute du module (moyen) avec

la température est à peu près linéaire. On remarque que δ croît beaucoup avec la période; ce comportement diffère de ceux notés en général pour les métaux précédents et ressemble plus à celui d'un modèle de Boltzmann simple. Mais l'allure surprenante des courbes ne permet ni d'affirmer que les lois d'un tel modèle sont bien suivies, ni de calculer l'énergie d'activation du processus mis en jeu. Il semble que cette allure soit due, au moins en partie, à une évolution de la structure sous l'effet d'un séjour prolongé à très haute température (avec peut-être action superposée des sollicitations mécaniques). Cette évolution et son effet sur les cycles couple-torsion avait déjà été notée pour l'aluminium⁴².

G) Verres

Des fils de verre ordinaire et de verre pyrex de 0,5 mm de diamètre ont été essayés à l'hystérésigraphe Chevenard, à 575° pour le verre ordinaire et à 600° pour le pyrex.

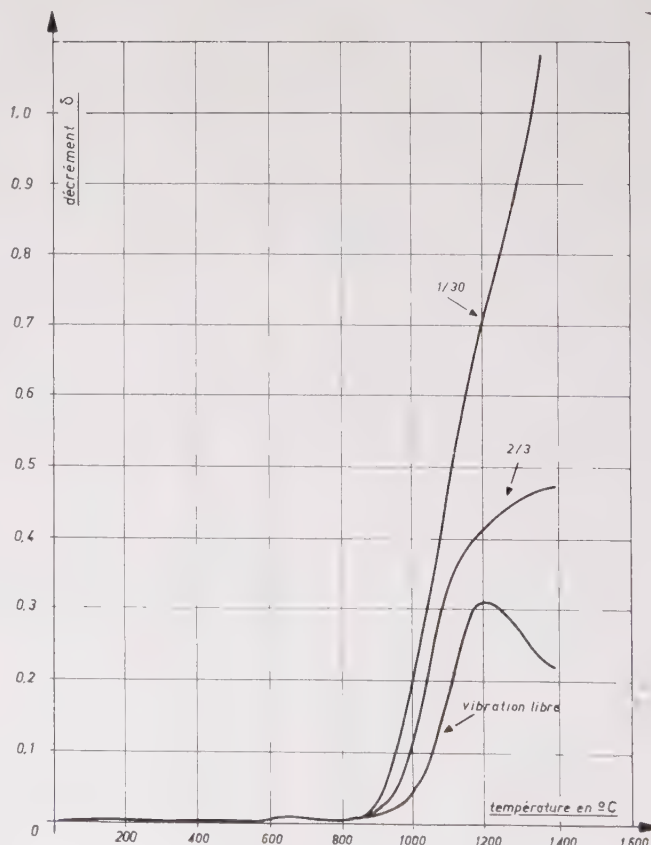


FIG. 51

Alliage Fe-Si. Variation du décrément (frottement interne) en fonction de la température, pour 3 fréquences (pour la vibration libre, la fréquence varie avec la température, en restant de l'ordre de 20 hertz).

Les cycles sont bien elliptiques et les ellipses restent homothétiques quand on fait varier l'amplitude. C'est ce qu'illustrent par exemple les figures 52 et 53, prises sur le verre pyrex pour deux amplitudes différentes. Pour

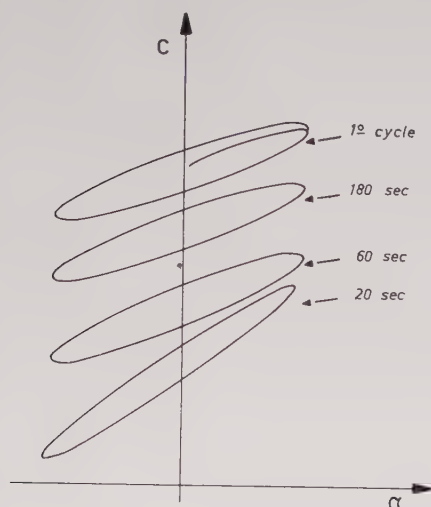


FIG. 52

Cycles couple-torsion pour le verre pyrex à 600°. Amplitude maximale dans la série d'essais.

les cycles lents on a reproduit aussi le premier cycle avec la courbe d'accommodation; la tangente au départ permet de mesurer assez bien le module de torsion non relaxé et de voir si le point Q de la figure 50 est ou non sur l'axe $O \alpha_0$. Pour le verre ordinaire, il en est très proche; pour le pyrex, plus éloigné : le verre ordinaire doit donc avoir un module relaxé très faible; c'est presque un liquide de Maxwell, alors que le pyrex est plus solide. Les variations de ψ , décrites ci-dessous, permettront de préciser ce point.

Pour vérifier l'homothétie des cycles enregistrés avec diverses amplitudes α_0 , on a mesuré l'angle θ du grand axe de l'ellipse avec l'axe des couples, l'excentricité e de l'ellipse, et l'angle ψ (par $\sin \psi = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, fig. 50). Ces résultats sont reportés pour une série de mesures sur du verre ordinaire au tableau XVIII.

L'homothétie est donc vérifiée de façon satisfaisante.

Le verre se comporte donc à ces températures comme un *corps visqueux linéaire*.

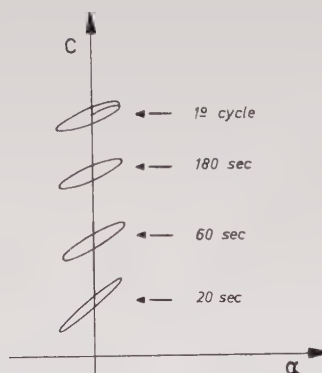


FIG. 53

Comme la figure 52, mais avec l'amplitude minimale.

Pour voir si son comportement est comparable à celui d'un modèle de Boltzmann (ou de Maxwell) simple, il faut encore étudier la variation de ψ (ou du décrément logarithmique) avec la fréquence.

Le tableau XIX donne pour les deux verres (ordinaire à 575° et pyrex à 600°) et pour une amplitude $\alpha_0 = 15^\circ$ les variations, en fonction

TABLEAU XVIII

$\frac{2\pi}{\omega}$ α_0	20 secondes			60 secondes			180 secondes		
	θ	e	ψ	θ	e	ψ	θ	e	ψ
5°	59° 35''	0,14	19° 30'	74° 0	0,24	43° 5'	84° 15'	0,18	62° 0'
10°	59° 30'	0,13	18° 10'	75° 5'	0,23	43° 30'	84° 35'	0,17	63° 55'
15°	60° 20'	0,13	17° 0	75° 15'	0,22	42° 40'	84° 25'	0,17	61° 40'
20°	60° 50'	0,13	17° 0	75° 10'	0,22	43° 10'	84° 35'	0,16	62° 40'

TABLEAU XIX

$\frac{2\pi}{\text{ver-}\omega}$ re	1 seconde			3 secondes			20 secondes			60 secondes			180 secondes		
	ψ	$\text{tg } \psi$	A/α_0	ψ	$\text{tg } \psi$	A/α_0	ψ	$\text{tg } \psi$	A/α_0	ψ	$\text{tg } \psi$	A/α_0	ψ	$\text{tg } \psi$	A/α_0
Ord.	8° 30'	0,15	0,25	12° 50'	0,23	0,33	23° 50'	0,44	0,50	65° 0'	2,14	0,38	75° 0'	3,73	0,26
Pyr.	4° 45'	0,10	0,19	10° 0'	0,175	0,33	14° 30'	0,26	0,39	23° 30'	0,435	0,41	24° 50'	0,44	0,41

de la période, de ψ (mesuré par le rapport α_1/α_0 , fig. 50), $\text{tg } \psi$ et A/α_0^2 (A aire du cycle; ce rapport est proportionnel à $C_0/\alpha_0 \sin \psi$).

Rappelons que $C_0 \sin \psi$ passe par un maximum quand $\omega = \frac{1}{\tau \alpha}$ alors que $\text{tg } \psi$ est maximal pour $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau_a \tau_c}}$ (formules [30] et [31]).

Pour le verre, le maximum de $C_0 \sin \psi$ a lieu pour une période de 20 s, alors que celui de $\text{tg } \psi$ ne se produit que pour une période proche de 180 s. Ceci correspond à un rapport

$$\sqrt{\frac{\tau_a}{\tau_c}} = \sqrt{\frac{k_R}{k_1}}$$

de l'ordre de $\frac{1}{9}$ (donc $k_R \neq \frac{1}{80} k_1$), et à un maximum de $\text{tg } \psi$ de 4,5 (d'après la formule [30] et l'annexe I), compatible avec les valeurs de $\text{tg } \psi$ portées au tableau.

On voit que, dans le cas du verre, les valeurs élevées de $\text{tg } \psi$ correspondent à un module relaxé très faible, ce qui montre qu'à 575° le verre ordinaire est presque un liquide de Maxwell.

Pour le verre pyrex, les maxima de $C_0 \sin \psi$ et $\text{tg } \psi$ sont tous deux situés entre 60 et 180 s, sans qu'on puisse les déterminer avec exactitude. Le rapport $\frac{\tau_a}{\tau_c}$ n'est donc pas beaucoup inférieur à 1; une valeur plus exacte en est donnée par la valeur maximale de $\text{tg } \psi$ et correspond (d'après la formule [30]) à $\frac{\tau_a}{\tau_c} \neq \frac{1}{2}$.

Le pyrex a donc encore à 600° un module non relaxé assez fort, donc un comportement plus « solide ».

Les maxima de $\text{tg } \psi$ ou de $C_0 \sin \psi$ sont loin d'être aussi aigus que ceux d'une fonction

$\frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$ (cf annexe I), surtout dans le cas du pyrex.

Le maximum de frottement interne est donc beaucoup plus étalé que dans le cas d'un modèle de Boltzmann simple.

H) Rhodoid

Des microépreuves de torsion ont été usinées dans du rhodoid et essayées à la machine de torsion alternée système Chevenard. Les cycles enregistrés sont peu ouverts; leur forme, elliptique en moyenne, présente de faibles irrégularités locales, comme les courbes de fluage (I, K). Le déphasage ψ entre couple et torsion est faible :

— pour une grande vitesse ($\omega = 3,47$ rad./s) le cycle se réduit sensiblement à une droite double;

— pour une vitesse plus faible ($\omega = 0,53$ rad./s), ψ reste compris entre 2°40' et 3°, même quand l'amplitude α_0 varie dans le rapport de 1 à 4. On peut donc dire que ψ est indépendant de l'amplitude.

La pente des cycles décrits à grande vitesse permet de mesurer le module élastique, donc de calculer la vitesse de relaxation par la formule [10 bis]. La figure 54 représente les variations en fonction de (ωt) , d'une part du couple mesuré, d'autre part de la vitesse de relaxation calculée. Ces grandeurs sont rapportées à leurs valeurs maximales : C/C_0 et V/V_0 . On voit que la courbe du couple est assez bien sinusoidale (cycle elliptique), alors que la courbe des vitesses de relaxation présente quelques irrégularités; mais en la « lis-

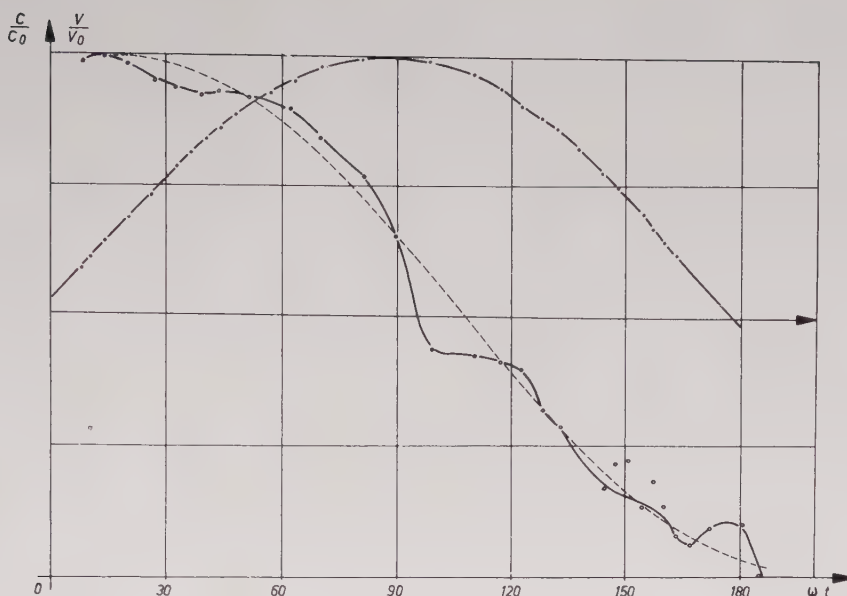


FIG. 54

Cycles couple-torsion du rhodoïd à l'ambiante :
courbes donnant la variation du couple (courbe ré-
gulière) et de la vitesse de fluage (courbe irrégulière)
au cours d'une période.

sant », on trouve une courbe moyenne sinusoïdale, d'où un cycle de vitesse de relaxation elliptique à quelques irrégularités près. *Le déphasage ψ' entre vitesse de fluage et couple est considérable, et compris entre 70° et 72° .*

III. — ESSAIS DE RELAXATION

Nous avons fait quelques essais de relaxation sur machine « T. R. » de Chevenard et Joumier, en imposant brusquement à une éprouvette un allongement initial et en enregistrant en fonction du temps la décroissance de la charge, qui est proportionnelle à σ , car la variation de section de l'éprouvette au cours de l'essai est négligeable. Un certain fluage de l'éprouvette se produit pendant la mise en charge, de sorte que l'allongement au moment où commence l'enregistrement est de l'ordre de 0,1 à 0,5 %; le début de la courbe est donc perturbé. Ces essais ont duré de 10 à 200 h.

On peut, sur la courbe enregistrée, procéder comme pour le fluage à une « analyse parabolique », par mesure de la pente $\frac{d\sigma}{dt}$ ou par la méthode des différences finies. Ceci revient à chercher si l'une des formules ci-dessous convient :

$$\sigma = \sigma_0 - a t^m \quad [55]$$

($m > 0$, σ_0 contrainte initiale; dans ce cas on ne peut extrapoler aux grandes valeurs de t , car σ deviendrait négatif).

$$\sigma = \sigma_1 + a t^m \quad [55 \text{ bis}]$$

($m < 0$, σ_1 contrainte asymptotique; formule qui n'est pas valable tout au début, car pour $t = 0$, σ serait infini). A la limite pour $m = 0$, on peut aussi trouver une loi logarithmique.

$$\sigma = \sigma_0 - a \log(1 + b t) \quad [56]$$

D'autre part, nous avons remarqué, en reportant sur un diagramme double logarithmique $\frac{d\sigma}{dt}$ en fonction de σ , que très souvent les points s'alignaient bien; ce qui signifie que $\frac{d\sigma}{dt}$ est proportionnel à une distance puissance de σ , équation qui, intégrée, donne :

$$\sigma = \frac{C t e}{(t + t_0)^n} \quad [57]$$

Nous avons indiqué au tableau XX les formules qui, d'après les résultats de ces diverses analyses, représentaient le mieux les courbes.

TABLEAU XX

MÉTAL	T °C	CHARGE initiale en kg/mm ²	LOI DE RECOUVRANCE (<i>t</i> en heures)
Nickel (Wiggin)	450	10	$\sigma = 10 - 1,5 t^{0,2}$ (pour $t \geq 1$ heure)
	500	7,5	$\sigma = \frac{15}{(t + 6,5)^{0,37}}$ (pour $t \geq 5$ heures)
	550	7,5	$\sigma = \frac{6,7}{(t + 0,64)^{0,25}}$ (dès le début)
	550	10	$\sigma = \frac{9,9}{(t + 0,95)^{0,29}}$ (dès le début)
Nical D	600	10	$\sigma = 11,4 - 2,35 t^{0,15}$ ($\geq 1,5$ heure)
	650	5	$\sigma = \frac{6,7}{(t + 3,2)^{0,25}}$ (dès le début)

D'autres essais ont été faits par G. Murry⁴⁸ sur de l'acier sorbitique (45 NCD 17 - coulée II), toujours sur machines T. R., en enregistrant la relaxation pendant 40 heures. La seule représentation qui conduise à des points bien alignés est celle de la figure 55; c'est dire que les courbes sont *hyperboliques*. On trouve ainsi (avec σ en kg/mm², t en heures) :

A 550°, ε imposé = 0,2 %

$$\sigma = 18,62 t^{-0,132} - 9,94$$

A 550°, $\varepsilon = 0,5$ %

$$\sigma = 15,66 t^{-0,194} - 5,42$$

A 600°, $\varepsilon = 0,2$ %

$$\sigma_1 = 3,63 t^{-0,272} - 0,84$$

Les valeurs asymptotiques σ_1 négatives ne sont évidemment pas possibles; leur présence est donc très probablement due à une évolution de la structure du métal (précipitation ou dissolution de carbures) favorisée par la contrainte de traction qui entraîne une variation de la longueur au repos. Cette évolution doit se produire au début de la relaxation, car G. Murry a observé qu'en prolongeant un essai pendant beaucoup plus longtemps, l'analyse donne un σ_1 sensiblement nul, la structure étant devenue stable. On remarquera que cette évolution ne se produit pas à 600°, mais à 550°, comme celle signalée par les cycles couple-torsion (II, E).

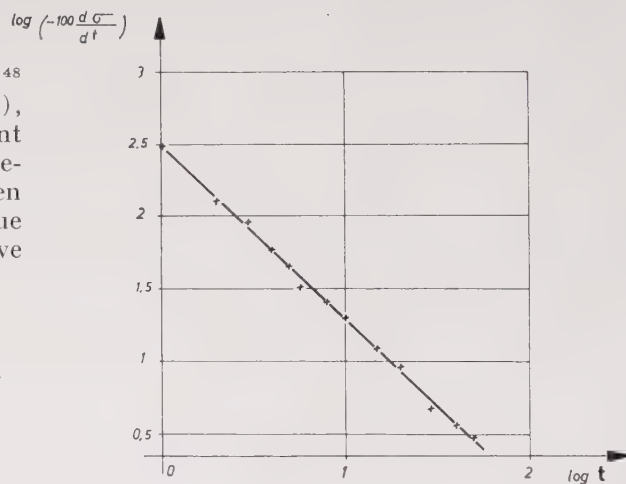


FIG. 55

Relaxation en traction de l'acier 45 NCD 17 à 550°, après un allongement initial de 0,5 %. Courbe représentant, en coordonnées double log, la vitesse de relaxation en fonction des temps (σ en kg/mm², t en heures).

Sur le même acier sorbitique, à l'état de fil de 1 mm de diamètre, R. Tamhankar⁴⁹ a pu enregistrer des courbes de relaxation en torsion; pour cela, on impose une torsion au fil, et on enregistre la contrainte sur un châssis chronographique. Le châssis enregistreur permettait un enregistrement assez rapide, mais limité dans le temps (20 mn). On remarquera qu'en torsion, la contrainte est hétérogène; mais comme ce métal possède une viscosité sensiblement linéaire, cette hétérogénéité ne

doit pas modifier sensiblement la forme des lois, par rapport à ce que l'on observe en traction simple. Les essais ont été effectués à des températures échelonnées de 560 à 690°.

Dans ce cas, R. Tamhankar⁴⁹ a observé que, tout au début, pendant quelques dizaines de secondes, la loi parabolique [55] est valable, avec un exposant $m \neq 0,4$. Puis il lui fait suite une loi du type [57], comme le montre l'analyse de la figure 56. La pente de ces courbes

apparentes. En effet, les t_0 (formule [57]) trouvés en torsion sont de l'ordre de 1 minute, donc négligeables à l'échelle du temps employé par Murry; à cette échelle, les formules [55] (avec $m < 0$) et [57] se confondent, à part l'existence de σ_1 . Mais il faut remarquer que, si l'existence d'un $\sigma_1 \neq 0$ dans le cas de la traction provient d'une évolution de la structure produisant une dilatation (volumétrique) du métal, celle-ci ne doit produire aucun effet en torsion sur le couple; c'est

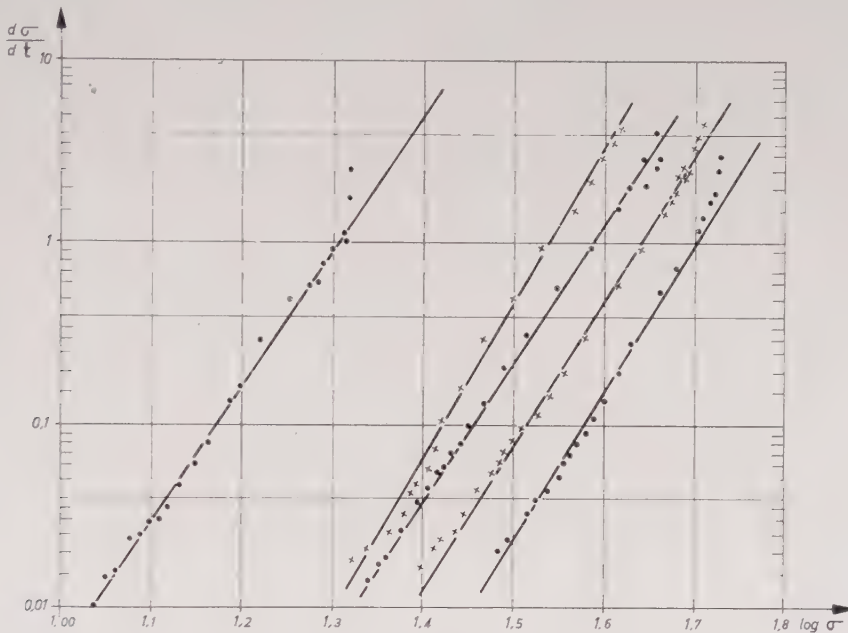


FIG. 56

Relaxation en torsion de l'acier 45 NCD 17. Relation linéaire entre $\log \frac{d\sigma}{dt}$ et $\log \sigma$, conduisant à la formule [57]. De gauche à droite, les courbes correspondent aux conditions suivantes : 560°, torsion initiale 3 (unités arbitraires); 620°, 600°, 580° et 560°, torsion initiale 7.

correspond à une valeur de $n \neq 0,16$; elle est indépendante de la déformation initiale imposée comme le montre la courbe de gauche de la figure 56, correspondant à une déformation plus faible que les 4 autres, dans le rapport de 3 à 7.

La portion parabolique initiale est d'autant plus longue que la température est plus basse, comme le montrent les courbes à 560° et 580° de la figure 56, où le début s'écarte de la droite correspondant à la formule [57]. C'est aussi ce qu'on remarque sur le tableau XX.

Les essais de G. Murry et de R. Tamhankar se raccordent très bien, malgré des divergences

pourquoi dans ce dernier cas une formule avec $\sigma_1 = 0$ convient.

En résumé, nous voyons que les courbes de relaxation sont représentables tout au début par une formule parabolique [55]. Puis, au bout d'un temps d'autant plus long que la température est basse, on passe progressivement à une formule hyperbolique du type [57], ou, si l'on tient compte dans certains cas de la possibilité de trouver une valeur asymptotique non nulle (ce qui est rare) du type

$$\sigma = \sigma_1 + \frac{a}{(1 + t)^n} \quad [57 \text{ bis}]$$

TABLEAU XXI

NOTES :

(*) : Forme : P. R. = parabole régulière. P. I. = parabole irrégulière.
L = début logarithmique.

A : Anomalie forte qui peut se manifester de diverses façons.

soit, à l'ambiante } aux charges moyennes : ralentissement temporaire plus fort que la loi parabolique (courbe genre fig. 29b, à gauche).

} vers 2,5-3 kg/mm² (Al) : tout au début, $m = 0,7-1$, puis baisse et donne ensuite P. R.

soit, à 150°-200°, m initialement faible (0,17-0,26), puis croît, ou réaccélération temporaire.

(**) : Les chiffres indiqués sont les valeurs moyennes de m pour les températures extrêmes de l'intervalle.

(***) : Ici, charge forte = produisant allongement initial ε_0 plus grand que celui du « point de transition » des courbes de traction, où commence la fragmentation des grains.

(****) : Sauf à la toute première charge après recuit; tout au début, fluage rapide de durée courte (hyperbolique).

MATÉRIAU	T °C	CHARGES σ_0 (kg/mm ²)	FORME du fluage primaire (*)	m			a Variation avec σ_0 exp. q .	n	RECOUVRANCE	
				Valeurs extrêmes	Variation avec T (**)	Variation avec σ_0			Amplitude de 10 ⁻⁵ en un jour	m'
Al raffiné monocr.	30-200	toutes	P. R.	0,28-0,47	→	→		1,75 (200°)	# 0 (7 dans un cas)	
			P. I.	parfois croît progres. à 0,7-0,8						
Id. polycr.	200	faible (0-2-0,3)	P. R.	0,63-0,7				2,5		
	30-200	moy.	A	(0,3-0,45)	(↗ ?)	↗	3,3 (30°)	1,3-1,6	3 (à 30°) un cas : 25 (à 100°)	
	30-200	forte (***)	P. R.	(0,29-0,80)	↗ (0,35-0,5)	→	10(30°) 4,2 (200°)	1,8-3	5 (à 200°)	
Al impur	100-298	toutes	P. R.	0,19-0,33	→				53	0,26
Zn monocr.	30	f (0,165)	P. I.	(0,22)						
Zn polycr.	30	f (0,6-1,2)	P. I.	(0,2)					10-15 (1 cas : 80)	
Id.	30-160	moy. et forte	P. R.	0,33-0,83	↗ (0,44-0,76)	↗	2,2(30°)	1,6-1,7 (160°)		

TABLEAU XXI (suite)

MATÉRIAU	T °C	CHARGES σ_0 (kg/mm ²)	FORME du fluage primaire (*)	m			a Variation avec σ_0 exp. q.	n	RECOUVRANCE	
				Valeurs extrê- mes	Variation avec T (**)	Variation avec σ_0			Amplitude de 10 ⁻⁵ en un jour	m'
Mg polycr.	150- 180	toutes	P. R.	0,28- 0,58		↗				
	200- 400	toutes	P. R.	0,36- 0,85	dispersé	↗				
Cu polycr.	25°	toutes	P. R.	0,13- 0,19 0,165		→	3,6			
Ni polycr.	400	moy. (8,09)	P. R.	0,45	↗					
Id.	450	moy. (5,59)	P. R.							
Id.	400- 450	fortes	L.							
Fer Armco polycr.	400- 450	moy	L.	(0 à) 0,38- 0,5						
Acier aust. nical D	600	10	P. R.	0,38				1,46	50	0,2- 0,56
Acier sor- bitique	500- 600	toutes	P. R.	0,30- 0,57	↗	→	1,5	1,1- 1,5	100	0,3- 0,4
Verre py- rex brut	400- 500	toutes	P. R.	0,28- 0,69	→	↗				
Verre py- rex recuit	500	toutes	P. R. (****)	0,52- 0,56		→	1	1,8- 2,6	100	0,5
Rhodoïd	30	toutes	P. R.	0,25- 0,31 et 0,58 (1 cas)					= fluage ($\simeq 1\%$)	0,18- 0,32

IV. — RESUME DES PRINCIPAUX RESULTATS EXPERIMENTAUX

A) Fluage sous charge constante

Dans l'ensemble, les courbes de fluage que nous avons étudiées sont bien représentées par une formule du type [8] :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a t^m + b t^n$$

Le tableau XXI en indique les principales caractéristiques : pour chaque matériau, dans

différents domaines de charge (les indications « faible », « moyenne », « forte », dépendent de la température et correspondent à des charges donnant des fluages très lents, lents ou rapides), nous avons indiqué si la forme de fluage primaire est bien parabolique, quelles sont les valeurs de l'exposant m (et s'il varie avec la température ou la charge), du coefficient a (variation en fonction de la charge, caractérisée par l'exposant q de $a \simeq \sigma_0^q$) et de l'exposant n , quand la courbe est réaccélérée.

On remarque que, dans l'ensemble, le fluage primaire est bien parabolique. Les principales exceptions sont :

a) L'aluminium raffiné, dans certains cas (éprouvettes polycristallines seulement et pour des charges ni faibles, ni fortes).

b) Le zinc, à des charges faibles.

c) Le nickel et le fer, à 400-450°. Dans ces deux métaux, l'analyse des courbes est ambiguë, car on peut les représenter :

— soit par la *somme* d'un terme logarithmique et d'un terme parabolique; mais pour ce dernier, il faut un exposant anormalement fort (0,7 — 1 pour Ni; > 1 pour Fe), ce qui est peu vraisemblable.

— soit par la *succession* d'un terme logarithmique et d'un terme parabolique normal (exposant 0,4-0,5);

— soit par la *somme* d'un terme hyperbolique et d'un terme parabolique normal.

Une mise en charge lente (fer) supprime l'anomalie initiale et ne laisse subsister que la parabole ($m = 0,38$).

Dans aucun des matériaux étudiés nous n'avons rencontré de véritable fluage logarithmique s'étendant sur une longue période de temps, comme on en rencontre pour Cu et Al en dessous de 0°, pour des alliages légers divers⁴⁷ et pour d'autres aciers²⁸.

En dehors de ces exceptions, l'exposant m est compris entre 0,13 et 0,85. Dans l'ensemble, il croît avec la température pour un même matériau (sauf Al monocristallin, verre brut et Mg, où il est trop dispersé pour déceler une tendance d'ensemble); d'un matériau à l'autre, m croît aussi avec la température « relative », c'est-à-dire rapportée à la température minimale de recristallisation. En gros m est de l'ordre de 0,5 à cette température, de 0,3 100° à 150° en dessous, et de 0,2 aux plus basses températures (relatives) essayées.

La fin de la courbe, lorsqu'elle est à vitesse sensiblement constante, ou réaccélérée, s'analyse bien d'une façon formelle, à l'aide de la formule [8]. Mais on voit que les valeurs de l'exposant n sont beaucoup supérieures à 1, bien que leur détermination soit souvent incertaine. Nous avons fait remarquer ailleurs (chapitre troisième, III, A, *in fine*) que cet accord formel n'avait pas grand sens physique; ceci est particulièrement net pour le verre, où l'on devrait s'attendre à une longue portion à vitesse stationnaire. *Il vaut mieux trouver une formule où le premier terme du fluage soit réellement transitoire, c'est-à-dire*

s'efface pour faire place au régime stationnaire (ou réaccélééré).

Les courbes de fluage transitoire obtenues en surchargeant une éprouvette, ou en rechargeant une éprouvette qu'on a laissé reposer après fluage, sont bien paraboliques. Elles ont, en général, un exposant m plus fort que si on appliquait directement la charge sur une éprouvette vierge; c'est le cas au moins pour Al et Zn; mais pas pour Mg, semble-t-il.

Le fluage est d'autant plus court et on atteint d'autant plus vite une vitesse stationnaire que la température est plus élevée, pour un matériau donné. Mais cela dépend beaucoup du matériau. Pour un rhodoïd, on obtient des fluages considérables sans trace de fluage secondaire, alors que pour les verres, dès que leur viscosité devient appréciable, on atteint assez rapidement le fluage secondaire après une partie parabolique relativement courte. Les métaux se placent entre ces deux extrêmes, et la forme de la courbe, sous ce rapport, dépend essentiellement de la position de la température d'essai par rapport à la température d'équicohésion; on appelle ainsi une température où la résistance des joints devient plus faible que celle des grains; elle est liée à la température de restauration, mais elle est plus forte (à température de fusion égale) pour les métaux hexagonaux que pour les cubiques. Ainsi, de ce point de vue, le Mg vers 400° se comporte comme le zinc vers 100° ou l'aluminium vers 200°.

Dans le cas de l'*acier sorbitique*, grâce à un enregistrement photographique rapide, on a pu observer que la tangente initiale à la courbe de fluage (et à la courbe de recouvrance après décharge) n'est pas verticale (comme le voudrait la loi en $a t^m$), mais possède une valeur finie; ce n'est qu'au bout de 10 à 30 s qu'on rattrape une variation parabolique.

La vitesse initiale de fluage ainsi mesurée est sensiblement proportionnelle à la charge de fluage; il en est de même de la vitesse initiale de recouvrance (qui lui est sensiblement égale); d'une façon générale, toute variation brusque de charge amène une variation proportionnelle de la vitesse de fluage, avec le même coefficient de proportionnalité. Cette loi est vraie tant qu'on n'atteint pas des valeurs trop fortes de la charge (à 500° par exemple, tant que σ_0 ne dépasse pas 20 à 25 kg/mm²).

Si la charge est trop forte, le fluage au début est très rapide, mais se ralentit très vite, pour se poursuivre ensuite à une allure parabolique. On a l'impression que le fluage sous forte charge se fait en deux étapes; la

première, hyperbolique (donc limitée par une asymptote) s'achève très rapidement (de l'ordre de 1 minute, ou moins); elle est d'ailleurs non recouvrable (irréversible); il lui succède ensuite un fluage parabolique normal.

Des phénomènes initiaux rapides du même genre s'observent sur le fer et le nickel à 400-450°, comme nous l'avons déjà dit, et sur l'aluminium pur à l'ambiante. Dans ce dernier, l'allongement initial, très rapide, hyperbolique, est suffisant pour fragmenter les grains (point de transition).

Il est intéressant de remarquer que la viscosité du verre reste dans le domaine linéaire. Pour tous les autres matériaux étudiés, la vitesse de fluage dans l'ensemble, croît beaucoup plus vite que proportionnellement à σ_0 , et varie sensiblement comme σ_0^q ($q = 3$ à 4 environ), à l'exception de l'acier sorbitique, qui constitue un cas spécial, linéaire en ce qui concerne les variations rapides de vitesse avec la charge, mais non-linéaire pour la suite du fluage (en particulier la vitesse stationnaire de fluage croît beaucoup plus vite que proportionnellement à σ).

Des courbes de recouvrance (raccourcissement spontané après décharge) ont été enregistrées dans beaucoup de cas. La recouvrance est faible pour les métaux mous comme l'aluminium pur, de sorte qu'on ne peut analyser la forme des courbes avec précision; mais elle est plus forte dans les métaux où les glissements rencontrent plus d'obstacles : aluminiums impurs, Zn, nicral, où elle peut atteindre 50 à 100.10⁻⁵ en un jour.

Elle est encore plus forte pour l'acier sorbitique, pour le verre, et surtout pour le rhodoïd où la déformation est complètement recouvrable. Pour le verre et l'acier sorbitique, si le fluage transitoire est court, l'allongement correspondant est presque entièrement recouvrable; de toutes façons, le début de la courbe de recouvrance a la même forme que le début de la courbe de fluage, retourné (bas en haut).

Pour tous les métaux où l'analyse a pu être faite, on trouve d'ailleurs que le début de recouvrance est parabolique (formule [39]).

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 - a' t^{m'}$$

m' ayant des valeurs de 0,20 à 0,56, donc de l'ordre de l'exposant m de fluage. Pour le nicral D, on a pu voir que a' varie comme $\sigma_0^{2,6}$. Parfois la courbe est logarithmique (fer Armco) comme la courbe de fluage.

Après un temps variable, qui peut aller

jusqu'à une dizaine d'heures, la courbe de recouvrance cesse d'être parabolique, la vitesse tendant vers 0 plus rapidement que pour une parabole. Dans un cas de recouvrance presque totale et prolongée longtemps (acier sorbitique) il semble que la meilleure formule pour rendre compte à la fois du fluage et de la recouvrance soit la formule [45] (I, H, 5°), qui peut s'écrire :

$$\varepsilon = a(t_f + t_r)^m - a t_r^m$$

où t_f représente le temps de fluage sous charge, et t_r le temps de recouvrance. ε , dans ce cas, ne comprend pas la partie élastique de variation de longueur.

Nous avons signalé au chapitre premier l'importance de la *tendance à la recouvrance*. On remarque que, pour toute une catégorie de matériaux, elle varie en sens inverse de l'exposant m : à très haute température, quand le fluage est très faible et que les obstacles possibles sont détruits par l'agitation thermique, la recouvrance est faible parce qu'il y a peu de contraintes internes, en même temps que m est fort, et tend vers 1 pour les verres à l'état « liquide » ou les métaux fluant par le mécanisme de Nabarro². A plus basse température, où les obstacles aux glissements peuvent avoir une plus grande solidité, m baisse alors que la tendance à la recouvrance augmente; cet effet est particulièrement net pour les corps possédant des *obstacles fixes pré-existant à la déformation* (acier sorbitique, zinc, rhodoïd, verre pyrex). Mais dans les métaux cubiques assez purs (Al, Ni, Fe), à température assez basse pour que les dislocations créées par les déformations se combinent en obstacles stables, il en résulte un blocage des glissements dans les deux sens, d'où *disparition de la tendance à la recouvrance, en même temps que m atteint des valeurs très faibles*.

B) Cycles couple-torsion

Pour présenter l'ensemble de ces résultats assez complexes, nous allons reporter sur un tableau (tableau XXII) les observations essentielles relatives aux points suivants :

- forme des cycles : à sommets pointus (type « plastique ») ou arrondis (type « visqueux »); on notera dans ce cas si le cycle est bien elliptique;

- influence de la vitesse, sur l'ouverture du cycle (mesurée par ψ , $\sin \psi$ ou $\operatorname{tg} \psi$, ou encore par le frottement interne δ) et sur la vitesse maximale du fluage (ou de relaxation) V_0 ;

- influence de la température, mesurée par l'énergie d'activation, quand elle a pu être évaluée;

TABLEAU XXII

MATÉRIAU	T essai °C	Forme cycle SP : sommets pointus SA : sommets arrondis E : ellipse D : ellipse déformée RD : cycle ra- pide réduit à droite	Influence ω sur ouverture des cycles (ψ ou δ) (t.) f. = influence (très) faible, ψ croissant un peu avec période	Influence ω sur V_c (exposant r de loi $V_o \simeq \omega^r$)	Influence T (mesurée par U énergie d'activa- tion en cal/mole)	Linéarité	CYCLES DE VITESSES de relaxation	
							Loi de similitude (en ω ou en ω et α_o)	ψ'
Al recuit	20-200	S.P.	t. f.	0,99	31 000 (plasticité)	non	(non)	20-25
	300, 400	S.A.	t. f.		11 000 (viscosité)			
Al pur écroui	20-100	S.A. (D)	t. f.	0,98-0,95	11 000	non	oui (ω)	(50)
Al très écroui	20-100	S.A. (# E) (R.D.)	f.	0,84		?	oui (ω)	
Zn	20	S.A. (# E) (R.D. pour α_o petit)	t. f.	0,85 (α_o faible) 0,94 (α_o fort)		(non)	oui (ω) et α_o)	55°
Ni recuit	20-200	S.P.	indép.	0,99	indép. T (?)	non	oui (ω)	35°
Ni écroui	300-400	S.P. (léger)						
	300, 400	S.A. (pour α_o faible, # E, R.D.)	$\delta \simeq \omega^{-0,3}$ ($\alpha_o = 15^\circ$)	de 0,63 ($\alpha = 10^\circ$) à 0,92 ($\alpha_o = 20^\circ$)		(non)	oui (ω)	37°
Fe (Armco)	20-200	S.P.			ouverture ↘ quand T ↗	non		
	275-495	S.A. (D)	$\sin \psi \simeq \omega^{-0,17}$		56 000	non		
Acier sorbitique	460-620	S.A. (E) (R.D. T modérée)	$\sin \psi \simeq \omega^{-0,21}$	0,79	78 000	sensi- blement oui	oui (ω et α_o) ?	64°
Verre ordinaire	575°	S.A. (E)	varie bcp max. 75° pour flanc pic $\text{tg} \psi \simeq \omega^{-0,34}$ $\text{tg} \psi \simeq \omega^{-0,3}$ f. (ψ faible)					faible (# liq.)
Ver. pyrex	600°	S.A. (E)				oui	à peu près	(40-45)
Rhodoïd	20	S.A. (E) (R.D.)						71°

— relation entre couple et vitesse de fluage (ou de relaxation); on notera quand les cycles

$\left(\frac{V}{V_o}, \frac{C}{C_o} \right)$ ont une forme indépendante de ω et de α_o (loi de similitude pour ω et α_o). Les valeurs du déphasage ψ' sont aussi indiquées; elles sont constantes quand il y a similitude;

— linéarité (homothétie des cycles à différentes amplitudes).

Ce tableau appelle quelques remarques intéressantes :

a) Il y a un bon parallélisme entre l'influence de la vitesse sur la forme des cycles

couples-torsion (caractérisée par exemple par ψ ou $\operatorname{tg} \psi$ ou δ , qui varient comme $\omega^{r'}$) et l'influence de ω sur V_0 ($V_0 \simeq \omega^r$) : on observe que $r' \neq r - 1$; comme ψ' varie peu avec ω , l'annexe III explique cette correspondance, au moins pour les matériaux visqueux où les cycles sont sensiblement elliptiques. Pour ces matériaux, l'exposant r a été mesuré directement dans tous les cas, sauf pour les verres; il va de 0,94 (Zn) à 0,63 (Ni écroui). Pour les verres, on peut déduire r indirectement de la variation de $\operatorname{tg} \delta$ avec ω ; encore celle-ci ne suit-elle une loi en $\omega^{r'}$ que pour les verres pyrex ($r = 0,70$). Pour le verre ordinaire ψ passe par un maximum; mais le « flanc » de ce pic ne suit pas la loi en $\frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$ d'un modèle de Boltzmann simple : on y retrouve la loi en $\omega^{r'}$ avec $r' \neq -0,34$ ($r = 0,66$).

Pour les cycles de type plastique, les calculs de l'annexe III ne sont plus valables. Malgré cela, on constate que la forme des cycles, donc δ ou ψ , varient très peu avec ω ($r' \neq 0$) alors que V_0 est sensiblement proportionnel à ω ($r = 1$). La relation $r' = r - 1$ s'étend donc à ce cas.

Si l'on compare les essais de fluage aux essais de torsion cyclique, on observe une corrélation négative, un peu floue, entre l'exposant r que nous venons d'étudier et l'exposant m de fluage transitoire. Pour la plupart des matériaux, on trouve, avec une dispersion pouvant atteindre 0,1

$$r + 0,6 m \neq 1,1 (\pm 0,1) \quad [58]$$

b) Alors que le frottement interne δ (ou ψ) varie avec ω , le déphasage ψ' en est sensiblement indépendant, et constitue donc un paramètre, caractéristique d'un matériau, à une température donnée.

Remarquons que dans les cycles à sommets pointus, ψ' est difficile à définir. Les valeurs que nous avons indiquées au tableau XXII sont déduites des cycles (V, C), par exemple de la figure 33, en considérant les points sur l'axe $C = 0$ ou les maximums de V; dans les deux cas, on trouve un déphasage ψ' faible. Mais si l'on fixe son attention sur les points correspondant au début de la détorsion, situés sur l'axe $V = 0$, on aurait tendance à croire que ψ' est voisin de 90° ; il est vrai que cette bosse accusée du cycle (V, C) vers le bas à droite ne correspond qu'à une petite partie des cycles de torsion.

Cherchons maintenant si ψ' est en relation avec l'autre paramètre que nous venons d'étudier, r . On constate en fait qu'il n'y a aucune bonne corrélation entre les deux, de faibles valeurs de ψ' correspondant aussi bien aux plus fortes valeurs de r , voisines de 1, qu'aux plus faibles (verre ordinaire, Ni, écroui).

Par contre, si on cherche à rapprocher les valeurs de ψ' des résultats des essais de fluage, on observe une corrélation intéressante entre ψ' et la tendance à la recouvrance : pour les matériaux à forte recouvrance (acier sorbitique, rhodoïd), ψ' est très fort (64° et 75°). Ce déphasage ψ' est moyen pour des matériaux où la tendance à la recouvrance est modérée (Zn, Al écroui à 100° , verre pyrex à 600° , qu'il faut ranger dans cette catégorie, car à 600° il doit avoir perdu la capacité de supporter les fortes contraintes internes qu'il avait à 500°). Enfin ψ' est faible pour les matériaux ne présentant pas de recouvrance (Al recuit, verre ordinaire à 575°).

En somme, si le matériau comporte des obstacles créant des tensions internes importantes, capables de faire rétrograder des glissements lors d'une décharge (recouvrance importante), ces mêmes tensions tendent également à retarder l'effet d'une mise en charge, d'où un déphasage ψ' important. Mais ce déphasage tend à diminuer :

— soit par manque d'obstacles assez rigides (cas des hautes températures, par exemple du verre ordinaire à 575°);

— soit, à l'extrême opposé, lorsque la déformation même fait apparaître un blocage dans les deux sens (matériaux « plastiques purs » par exemple Al en dessous de 200°),

Etant donné la corrélation négative signalée en a) entre la tendance à la recouvrance et la valeur de l'exposant m , au moins pour les matériaux à comportement visqueux, on doit s'attendre à une corrélation également négative entre ψ' et m . C'est bien ce que l'on observe, à condition de laisser de côté les matériaux plastiques avec cycles à sommets pointus.

Mais cette corrélation est trop peu générale pour que, jointe à la corrélation assez vague exprimée par la loi [58] il en résulte une corrélation entre ψ' et r .

On peut se demander s'il est justifié d'essayer d'établir une relation entre les lois de

fluage en traction simple et en torsion étant donné que dans ce dernier cas la contrainte n'est pas uniforme, et croît de la valeur 0 au centre à une valeur maximale sur la périphérie. Cette hétérogénéité pourrait entraîner comme conséquence que les formes des lois de fluage soient différentes en traction et en torsion.

On remarquera d'abord que ce risque n'existe pas dans le cas où la viscosité est linéaire, car dans ce cas toutes ces grandeurs (contrainte, déformation, vitesses de fluage) sont proportionnelles à la distance au centre, en sorte que la forme des équations est inchangée.

Par contre, dans le cas d'une viscosité non linéaire, la transposition d'un cas à l'autre n'est pas justifiée de façon évidente. Nous avons cependant voulu en confirmer expérimentalement la possibilité en nous plaçant dans le cas le plus défavorable : cuivre à

l'ambiante où l'on est très loin de la linéarité. En adaptant un châssis chronographique sur un hystérésigraphe modifié pour faire des essais sous couple constant nous avons enregistré à 20° des courbes de fluage de cuivre OFHC; en les analysant par méthode différentielle on trouve que ce fluage en torsion *suit bien une loi parabolique avec un exposant m compris entre 0,13 et 0,14, c'est-à-dire exactement la même valeur qu'en traction sous des contraintes comparables.*

Cette coïncidence justifie la transposition de la traction à la torsion. Elle est d'ailleurs explicable, si l'on songe qu'en torsion les couches annulaires successives fluent suivant une loi en a^m avec les valeurs de a et de m correspondant à la valeur de la contrainte à cette distance du centre. Comme m varie en général peu avec la contrainte, l'expression t^m se met en facteur partout, ce qui explique qu'on la retrouve avec le même exposant dans la loi de fluage en torsion.

CHAPITRE SIXIEME

DISCUSSION DES RESULTATS

Nous avons indiqué au chapitre quatrième les lois de déformation que suit un corps visco-élastique constitué comme un « modèle de Boltzmann ».

Nous allons examiner si ces lois correspondent à celles observées en réalité et décrites au chapitre précédent. Nous verrons qu'il n'en est rien, et nous examinerons ensuite si les lois expérimentales peuvent être expliquées par une *combinaison* de plusieurs modèles de Boltzmann :

— soit *indépendants* et distribués selon une certaine fonction de répartition;

— soit en *interaction les uns avec les autres*, ce qui nous permettra de définir un *nouveau type de modèles rhéologiques*, que nous appellerons « *modèle à interaction* ».

I. — CONFRONTATION AVEC LES LOIS DU MODELE BOLTZMANN SIMPLE

A) Fluage sous charge constante

La loi de fluage du modèle de Boltzmann a été indiquée au chapitre quatrième (formule [28]). Elle est exponentielle, et ne correspond pas du tout à la forme parabolique des courbes de fluage.

On peut, à la suite d'un modèle de Boltzmann qui correspond à un « solide », ajouter un amortisseur qui le transforme en un « liquide » (modèle de Burgers). La loi de fluage correspondante est celle donnée, par exemple, par Mc Vetty (formule [6]). Bien que, grossièrement, son allure ressemble un peu à celle d'une courbe parabolique, une analyse différentielle prouve qu'elle ne convient pas du tout. C'est ce que montre la figure 29 b, où on voit à droite une parabole expérimentale, et à gauche une courbe correspondant à la formule [6]. A part une ou deux exceptions (A, 1, 2 et A II 2, tableau III), représentables par la formule [38] qui rappelle la formule [6], la loi de Mc Vetty ne s'applique pas du tout.

En outre, le modèle de Boltzmann simple exigerait que les lois de fluage fussent linéaires en fonction de la charge; ce n'est en général pas le cas, sauf pour le verre et, partiellement, pour l'acier sorbitique.

B) Relaxation à longueur constante

Comme dans le cas du fluage, la loi de relaxation devrait être exponentielle. Cette forme ne correspond pas aux lois empiriques observées.

C) Cycles couple-torsion

Certains cycles sont bien elliptiques et leur forme (ou ouverture) indépendante de l'amplitude, comme pour le modèle de Boltzmann (verre, acier sorbitique). Mais, même dans ce cas, il y a un désaccord en ce qui concerne la variation de la forme du cycle avec la fréquence, caractérisée par le frottement interne δ ou le déphasage ($\delta = \pi \operatorname{tg} \psi$) ou encore la hauteur $C_0 \sin \psi$. Théoriquement, ces variations devraient présenter des « pics » assez aigus (formules [30] et [31]); pratiquement, on n'observe pas de pics, mais une lente croissance avec la période (en ω^{-m} , cf tableau XXII), sauf dans le cas du verre ordinaire à 575°, qui tend vers un liquide de Maxwell (et encore le « flanc » du pic correspond-t-il à une variation en $\omega^{-0,34}$, et non ω^{-1} comme le voudrait la formule [30]). Autre désaccord: en général ψ' est constant (loi de similitude), alors que dans le modèle de Boltzmann, $\operatorname{tg} \psi'$ varie comme ω^{-1} (annexe I, formule [A 12]).

Si le désaccord est déjà net pour ces deux matériaux, il l'est encore plus pour les autres, où la forme des cycles n'est pas elliptique, et change avec l'amplitude.

Ainsi, dans aucun cas, un modèle de Boltzmann simple ne peut-il expliquer le comportement rhéologique des matériaux étudiés.

II. — ESSAI D'EXPLICATION PAR GROUPEMENT EN PARALLELE DE MODELES DE BOLTZMANN INDEPENDANTS

A) Cas du fluage sous charge constante

1° Cas linéaire.

On peut considérer l'allongement de fluage comme une somme d'allongement dus à des modèles de Boltzmann indépendants, agissant en parallèle. Sous charge constante, chaque modèle cause un allongement.

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_1 (1 - e^{-\lambda t}) \quad [59]$$

Si les paramètres λ (où les temps de relaxation $\tau_\sigma = 1/\lambda$) diffèrent d'un modèle à l'autre, le calcul de l'allongement de fluage total :

$$\varepsilon = \sum \Delta \varepsilon$$

exigera la connaissance de la fonction de répartition des paramètres λ , soit $f(\lambda)$. On peut toujours supposer les $\Delta \varepsilon_1$ identiques pour tous les modèles, en remplaçant un modèle où $\Delta \varepsilon_1$ est fort par plusieurs modèles moyens et en jouant sur la fonction de répartition

$$\varepsilon(t) \simeq (\Delta \varepsilon_1) \cdot \int_0^\infty \bar{f}(\lambda) (1 - e^{-\lambda t}) d\lambda \quad [60]$$

Une sommation de ce genre, que nous avons déjà utilisée³⁰, est très analogue à une transformation de Laplace, en sorte qu'on peut toujours trouver une fonction $f(\lambda)$ qui donne une loi $\varepsilon(t)$ parabolique; ces transformations sont aujourd'hui classiques en rhéologie⁴⁴ et ont été appliquées par Feltham au fluage des métaux⁴⁵. Il suffit de prendre $f(\lambda)$ de la forme $\lambda^{-(m+1)}$ (à une constante de normalisation près (*); on trouve pour l'allongement de fluage, en posant $u = \lambda t$:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(t)}{\Delta \varepsilon_1} &\simeq \int_0^\infty \lambda^{-1-m} (1 - e^{-\lambda t}) d\lambda \\ &\simeq t^m \int_0^\infty u^{-1-m} (1 - e^{-u}) du \quad [61] \end{aligned}$$

L'intégrale converge pour les deux limites; elle est donc égale à une constante, et ε est bien de la forme $a t^m$.

Malgré son succès apparent, ce calcul se heurte à deux objections :

a) Le modèle de Boltzmann étant linéaire, la constante $\Delta \varepsilon_1$ [59], proportionnelle à σ , vient en facteur dans l'intégration, de sorte qu'en définitive le coefficient a devrait être proportionnel à σ . Or cette proportionnalité n'est réalisée que rarement (verre, acier sorbitique); en général, a croît comme σ^q , q pouvant prendre des valeurs élevées, jusqu'à 10 (tableau XXI).

b) Dans ce calcul, m caractérise une fonction de répartition qui dépend de la structure du métal. C'est une donnée qui ne devrait dépendre ni de σ , ni de la température. Or, nous avons vu que l'exposant m varie avec σ et croît avec la température.

* Notons que pour que cette normalisation ait un sens, il faudrait que l'intégrale de λ^{-1-m} converge aux deux bornes, ce qui n'est pas le cas pour la borne 0. Il faut donc tronquer la distribution à une valeur petite mais non nulle, ce qui ne change pas sensiblement les résultats qui suivent.

Pour faire face à ces deux objections, il faudrait que la forme de la fonction de répartition $f(\lambda)$ varie avec les conditions expérimentales, contraintes et température; mais alors ce ne serait plus une caractéristique de l'état du matériau. On peut s'en tirer en admettant que la répartition porte, non sur λ , mais sur un paramètre qui ne lui soit pas proportionnel.

2° Théorie mixte.

C'est ce que j'avais fait³⁰ en remarquant que λ est proportionnel à la vitesse de fluage initiale du modèle, et que celle-ci doit, physiquement, dépendre d'un processus activé, dont la vitesse v_0 est donné par une loi d'Arrhenius. J'avais à l'époque pris la loi de Becker-Orowan, qui donne pour cette vitesse :

$$v_0 \simeq e^{-\frac{V(\sigma_0 - \beta\sigma)^2}{2GkT}} \quad [62]$$

où V est le volume d'activation, σ_0 la résistance au glissement « théorique » du réseau parfait, β un « facteur d'entaille » caractéristique des « centres de déformation » où naissent les glissements, et G le module de Coulomb; les autres constantes ayant été déjà définies. J'avais, de plus, admis que $\Delta \varepsilon_1$ était indépendant de σ , ce qui n'est pas vrai au sens strict pour des modèles de Boltzmann; mais en admettant que les déformations élémentaires correspondent aux glissements de chacune des lignes apparaissant à la surface; comme ceux-ci sont limités³¹, cette hypothèse correspond aux observations expérimentales.

En tenant compte de la probabilité des glissements en sens inverse, comme l'a fait Kochendorfer⁴⁶, on doit écrire :

$$v_0 \simeq e^{-\frac{V(\sigma_0 - \beta\sigma)^2}{2GkT}} - e^{-\frac{V(\sigma_0 + \beta\sigma)^2}{2GkT}} \\ \simeq e^{-\frac{V}{2GkT}(\sigma_0^2 + \beta^2 \sigma^2)} \text{Sh}\left(2, \frac{V}{2GkT} \sigma_0 \beta \sigma\right) \quad [63]$$

En ne conservant que les termes dépendant de β et σ , et en posant :

$$x = \beta \sigma \sqrt{\frac{V}{2GkT}} \\ A = \sigma_0 \sqrt{\frac{V}{2GkT}} \quad [64]$$

on trouve pour v_0 une expression de la forme :

$$v_0 \simeq e^{-x^2} \text{Sh}(2Ax) \quad [65]$$

La figure 57 représente, en coordonnées doubles logarithmiques, les variations de v_0 en fonction de x , pour diverses valeurs du paramètre A . On voit que ces courbes possèdent

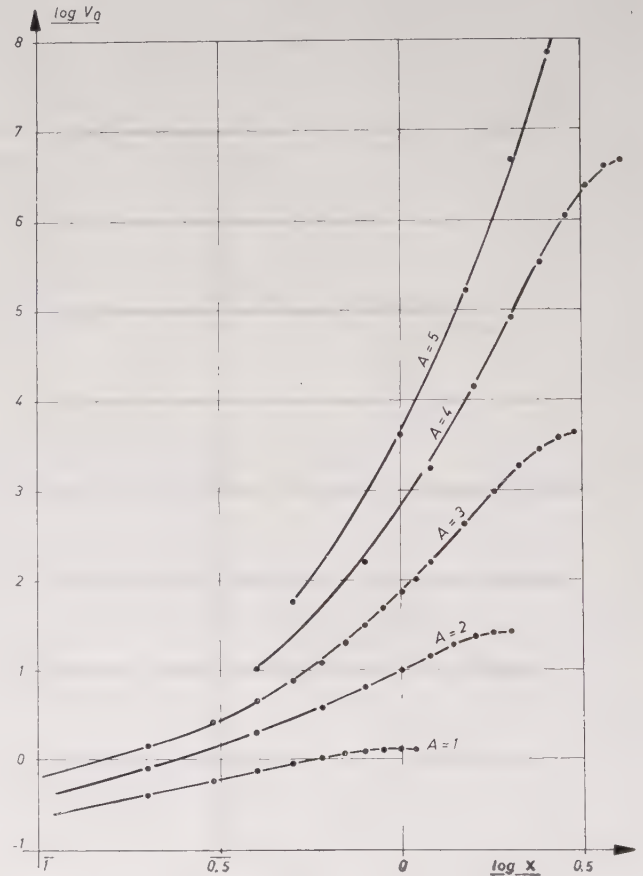


FIG. 57

Représentation de la formule $V_0 = e^{-x^2} \cdot \text{sh}(2Ax)$ pour diverses valeurs de A . Anamorphose double log.

une longue inflexion, où l'on peut confondre la courbe (log-log) avec sa tangente; c'est dire qu'on a dans un intervalle assez grand :

$$v_0 \simeq x^8 \quad [66] \\ \simeq (\beta \sigma)^8$$

Des estimations que nous ne développerons pas ici montrent que pour A des valeurs raisonnables s'échelonnent entre 3 et 5 (cas de l'aluminium, de l'ambiante à 200°), ce qui

donne pour q des valeurs de l'ordre de 4 à 15 environ.

Revenons alors à notre intégrale [61] et remplaçons λ (ou v_0 qui lui est proportionnel) par une expression tirée de [66] :

$$\lambda = a \beta^s \sigma^s \quad [67]$$

On peut alors faire porter la répartition, non sur λ mais sur β , qui représente une caractéristique des centres de déformations; en prenant une loi de répartition du même genre que dans [61], en β^{-p} , il vient :

$$\varepsilon(t) = \Delta \varepsilon_1 \int_0^\infty \beta^{-p} (1 - e^{-a \beta^s \sigma^s t}) d\beta \quad [68]$$

en posant :

$$u = a \sigma^s \beta^s t$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta \varepsilon_1}{q} a^{\frac{p-1}{s}} \sigma^{p-1} t^{\frac{p-1}{s}}$$

$$\int_0^\infty (1 - e^{-u}) u^{\frac{1-p}{s}-1} du \quad [69]$$

l'intégrale converge à l'infini si $p > 1$, et à l'origine si $p-1 < s$. Dans ces conditions, on trouve pour $\varepsilon(t)$ une expression de la forme :

$$\varepsilon \simeq \sigma^{p-1} t^{\frac{p-1}{s}} \quad [70]$$

soit, en posant $p-1 = ms$ ($0 < m < 1$ d'après les conditions de convergence énoncées ci-dessus) :

$$\varepsilon = a' \sigma^{ms} t^m = a t^m \quad [71]$$

qui est bien de la forme [2]. Cette formule répond aux deux objections mentionnées ci-dessus; en effet :

— la variation de a avec σ est bien représentée par une fonction puissance dont l'exposant, avec les valeurs indiquées de s , est de l'ordre de 3 à 6 par exemple, valeur observée en fait dans plusieurs cas;

— l'exposant m varie avec la température. En effet, p est invariable (par définition), mais s croît avec A (cf. fig. 57) et A varie sensiblement comme $T^{-1/2}$, d'après la définition

de ce paramètre [64]. Il en résulte que m croît bien avec la température, et dans un rapport raisonnable.

Mais cette théorie se heurte à d'autres objections :

a) La théorie de Becker-Orowan est aujourd'hui abandonnée au profit de la théorie des dislocations.

b) La théorie ne va pas quand on s'approche du cas linéaire (par exemple verre, acier sorbitique); en effet, si la viscosité est linéaire, $s = 1$, et comme $m \neq 0,3$, a varierait comme $\sigma^{ms} = \sigma^{0,3}$, c'est-à-dire beaucoup moins vite que ne l'indique l'expérience.

c) L'exposant, $ms = p-1$, donnant les variations de a avec σ , est invariable, ce qui est contraire à l'expérience (aluminium A II).

d) Il y a une contradiction dans l'attitude qui consiste à faire appel à des modèles linéaires, comme le suppose la loi de déformation élémentaire [59] et à admettre que la variation de v en fonction de σ est non linéaire.

e) La fonction de répartition β^{-p} est très arbitraire; comme l'exposant m varie peu d'un matériau à l'autre, et qu'on retrouve notamment des valeurs voisines de 0,3 aussi bien pour des monocristaux d'Al que pour des aciers sorbitiques ou du rhodoïd, il faudrait admettre que la répartition des facteurs β est la même dans tous ces cas, ce qui serait surprenant.

Essayons de voir si, par de nouvelles modifications, on peut répondre à ces nouvelles objections.

Pour répondre à (a) et (b), cherchons à remplacer l'expression de v_0 [62], par une expression équivalente tirée de la théorie des dislocations.

En essayant d'introduire la probabilité de mise en mouvement d'une source de Frank-Read, on est conduit à prendre des fonctions de répartition qui ne sont ni vraisemblables, ni simples. Par contre, on peut admettre, comme le font en général les théoriciens à l'heure actuelle, que la vitesse de fluage est commandée par la montée des dislocations³. En tenant compte des possibilités de déplacement dans les deux sens, on est conduit,

dans les zones de forte contrainte (par exemple en tête d'empilements) à une expression du genre :

$$v_0 \simeq e^{-\frac{U_1 - b^3 \sigma'}{kT}} = e^{-\frac{U_1 + b^3 \sigma'}{kT}} \quad [72]$$

où U_1 est une énergie d'activation fonction des énergies d'autodiffusion et de formation des crans sur les dislocations, b le vecteur de Burgers et σ' la composante normale au plan de glissement de la contrainte locale. D'où :

$$v_0 \simeq e^{-\frac{U_1}{kT}} S h\left(\frac{b^3 \sigma'}{kT}\right) \quad [73]$$

la relation entre σ' et la tension appliquée σ dépend beaucoup de la disposition de détail des dislocations. Par exemple, pour une source de Frank-Read émettant des dislocations venant s'empiler sur des obstacles, σ' serait proportionnel à σ^2 , et on aboutirait au résultat paradoxal que, même aux faibles contraintes, v_0 serait proportionnel à σ^2 et le fluage ne serait pas linéaire. On peut, par contre, imaginer des dislocations isolées butant sur des obstacles (précipités, barrières, etc...) et montant pour les contourner, car elles sont tirées par la tension de ligne des arcs qui s'incurvent entre les obstacles. Dans ce cas, σ' sera proportionnel à σ , et on pourra poser :

$$\frac{b^3 \sigma'}{kT} = \beta \sigma \quad [74]$$

le coefficient β variant d'un obstacle à l'autre, selon la distance des obstacles voisins qui détermine la longueur des arcs de dislocation de part et d'autre.

Dans ce cas, v_0 variera comme $S h(\beta \sigma)$. Or, en représentation double logarithmique, on constate qu'un $S h$ est représenté par une courbe peu incurvée, donc la pente croît à partir de 1; dans un domaine plus large, on peut donc confondre cette courbe avec sa tangente, et écrire :

$$v_0 \simeq (\beta \sigma)^s \quad (s \geq 1)$$

On est ramené à un calcul analogue au précédent et à une expression du genre [69]. Mais ici, on ne peut supposer $\Delta \varepsilon_1$ indépendant de σ ; il faut se mettre dans le cas du modèle de Boltzmann véritable, où $\Delta \varepsilon_1$ est proportionnel à σ ; comme v_0 est égal à $(\Delta \varepsilon_1 \times \lambda)$, il faudra ici prendre λ proportionnel à $\beta^p \sigma^{s-1}$.

Cela change légèrement le calcul, et au lieu de l'expression [71], on trouve :

$$\varepsilon = a' \sigma^{1+m(s-1)} t^m \quad [75]$$

Plus la température sera élevée, plus β sera faible d'après [74], plus on opérera avec des contraintes σ faibles, et plus, par conséquent, on se rapprochera de l'origine de la courbe en $S h$; donc s décroît quand la température croît, ce qui donne un exposant m croissant avec la température, comme le montre l'expérience. D'autre part, cette formule convient dans le cas linéaire, car pour $s = 1$ le coefficient a varie comme σ .

Mais l'objection (c) subsiste, car $1 + m(s-1)$ varie très peu avec la charge ou la température.

3° Cas non linéaire.

Pour répondre à (d), il faut remplacer la loi de fluage élémentaire [59] par celle qu'on déduirait du modèle de Boltzmann dans le cas d'une viscosité non linéaire; par exemple, dans le cas où la « vitesse de fluage » de l'amortisseur de la figure 6 serait proportionnelle à une puissance (d'exposant s) de la tension agissant sur ledit amortisseur.

D'après l'équation [22], on aurait dans ce cas :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \simeq (\sigma - k_2 \varepsilon)^s \quad [76]$$

où ε représente l'allongement de fluage, appelé ε_2 dans la formule [22]). Posant $\frac{\sigma}{k_2} = \varepsilon_\infty$, il vient :

$$\frac{d\varepsilon}{(\varepsilon_\infty - \varepsilon)^s} \simeq dt \quad [77]$$

d'où en intégrant :

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^n} \right], \text{ avec } n = \frac{1}{s-1} \quad [78]$$

Il faut maintenant sommer des termes élémentaires du type [78] :

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_1 \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^n} \right]$$

On remarque que, dans ce cas, la vitesse initiale est :

$$v_0 = \frac{n \Delta \varepsilon_1}{t_0} \quad [79]$$

La sommation doit donc se faire en faisant varier ou $\Delta \varepsilon_1$, ou t_0 . Une sommation sur $\Delta \varepsilon_1$ ne conduit à aucun résultat intéressant, car

une loi en $1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^n}$, s'écarte trop d'une

loi en t^m pour pouvoir constituer une approximation valable. Il faut donc faire varier t_0 .

Par analogie avec les calculs des équations [60] et [61], il est préférable de prendre pour paramètre $\lambda = \frac{1}{t_0}$, proportionnel à v_0 . Si $f(\lambda)$ est la fonction de répartition de ce paramètre, le problème se ramène au calcul de l'intégrale :

$$\varepsilon = \Delta \varepsilon_1 \int_0^\infty f(\lambda) \left[1 - \frac{1}{(1 + \lambda t)^n} \right] d\lambda \quad [80]$$

calcul que l'on effectue comme précédemment dans le cas linéaire, en posant $u = \lambda t$, ce qui donne :

$$\varepsilon = \Delta \varepsilon_1 \int_0^\infty f\left(\frac{u}{t}\right) \left[1 - \frac{1}{(1 + u)^n} \right] \frac{du}{t} \quad [81]$$

Il suffit de prendre une fonction de répartition hyperbolique $f(\lambda) \simeq \lambda^{-1-m}$, pour trouver un allongement de fluage en t^m :

$$\varepsilon \simeq \Delta \varepsilon_1 t^m \int_0^\infty \left[1 - \frac{1}{(1 + u)^n} \right] u^{-1-m} du \quad [82]$$

Comme précédemment, cette théorie présente l'inconvénient de donner un exposant m invariable. On y remédie en remarquant que le paramètre λ , proportionnel à v_0 , n'est pas caractéristique de la structure, mais dépend aussi de σ , par la relation [66]. En prenant pour paramètre de répartition le paramètre β , lié à la structure, on retombe sur la formule [75]. Cette formule est d'ailleurs générale, pour tous les cas où la déformation élémentaire $\Delta \varepsilon$ peut se mettre sous la forme :

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_1 \varphi(\lambda t)$$

λ (ou v_0) étant lié à la contrainte par des relations du type $v_0 \simeq (\beta \sigma)^s$ ou $\lambda_0 \simeq \beta^s \sigma^{s-1}$,

à condition que les intégrales où figure φ aient un sens.

La théorie ainsi modifiée répond donc aux objections (a), (b) et (d). Subsistent les objections (c) (comme dans le cas précédent) et surtout (e).

B) Cas des essais de relaxation

Nous avons vu que les courbes de relaxation sont, en général, bien représentées par une formule hyperbolique [57 bis], qui peut s'écrire :

$$\sigma = \sigma_x + (\sigma_0 - \sigma_x) \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^n} \quad [83]$$

Or, en s'inspirant des calculs que nous venons de faire pour le fluage sous charge constante, dans le cas non linéaire (formules [76] à [78]), on peut écrire l'équation [22] sous la forme :

$$\left(\frac{d\varepsilon_2}{dt}\right)^{\frac{1}{s}} \simeq k_s \left(\frac{\sigma}{k_R} - \varepsilon\right) \quad [84]$$

($\varepsilon \simeq$ déformation totale, ici constante; $\varepsilon_2 =$ allongement de fluage). D'où, d'après [20] :

$$\frac{d\sigma}{dt} = -k_1 \frac{d\varepsilon_2}{dt} \simeq -(\sigma - \sigma_x)^s \quad [85]$$

en posant $\sigma_x = k_R \varepsilon_T$. En intégrant, on trouve bien l'expression [83].

On remarquera que, dans ce cas, une superposition de modèles ou « centres de relaxation » tous identiques suffit à rendre compte des lois de relaxation, sauf tout au début de la relaxation, où souvent la loi [83] ne s'applique pas bien. L'intervention d'une fonction de répartition (par exemple en λ^{-1-m} , comme dans le cas du fluage) conduit à des équations inextricables, au moins dans le cas non linéaire. On ne peut pas affirmer que la forme de la loi [83] ne soit pas préservée, mais cela semble peu probable. Il est donc probable qu'effectivement les « modèles » ou centres de relaxation qui restent en jeu, une fois les premiers instants passés, sont tous identiques.

C) Cas des cycles couple-torsion

1° Cas des cycles elliptiques (modèles à viscosité linéaire).

Nous avons vu plus haut qu'un modèle de Boltzmann donnait bien des cycles couple-torsion elliptiques; et que la pente $\frac{dc}{d\alpha}$, aux points situés sur l'axe $c = 0$, est plus faible que celle correspondant au module relaxé, comme on l'observe en fait. Mais ce modèle n'explique ni l'invariance de ψ' (« loi de similitude »), ni l'allure des variations du frottement interne ($\delta = \pi \operatorname{tg} \psi$) ou de V_0 avec ω .

Nous allons voir si une superposition en série de modèles de Boltzmann permet d'expliquer ces lois empiriques, à condition de supposer ces « modèles » différents les uns des autres, et caractérisés par un paramètre (« viscosité ») distribué selon une certaine loi de répartition*.

Cette hypothèse de modèles *en série* revient à supposer un certain nombre de « centres de déformation » (par exemple dislocations) de viscosité différentes, dont les déformations s'ajoutent. De ce fait, le calcul est très difficile dans le cas où la variable extérieure imposée est la *déformation*, car la phase ψ varie d'un centre à l'autre, et on ne sait comment répartir à chaque instant les déformations individuelles entre les différents centres. Le problème est beaucoup plus simple si l'on considère que la variable imposée est la *contrainte* (ou le couple), car on peut alors calculer séparément la phase et la déformation de chaque centre, et la déformation de fluage totale sera simplement leur somme. Mais, en fait, dans le cas de cycles elliptiques, cela n'a pas d'importance, car si la déformation imposée est sinusoïdale pure, la contrainte, ou le couple, l'est aussi, et réciproquement; dans ce cas, on peut donc toujours supposer un couple sinusoïdal imposé.

Dans ces conditions, chaque centre de déformation apporte à la vitesse de fluage total une contribution :

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta V_0 (\sin \omega t + \psi + \psi') & [86] \\ &= \Delta V_0 \cos \psi' \sin (\omega t + \psi) \\ &+ \Delta V_0 \sin \psi' \cos (\omega t + \psi) \end{aligned}$$

* Signalons en passant une petite difficulté : en torsion, la contrainte n'est pas homogène. Mais cela n'a pas d'importance tant que l'on reste dans le domaine de la viscosité linéaire; ce qui est le cas, plus ou moins rigoureusement pour les matériaux donnant des cycles elliptiques.

En utilisant les formules [A 58], [A 6] à [A 9] et en appliquant les notations α_0 , k , k_R , τ_α et τ_c du chapitre quatrième aux grandeurs correspondantes du centre élémentaire considéré, on peut écrire :

$$\Delta V_0 \cos \psi' = \alpha_0 \omega \sin \psi \quad [87]$$

$$\Delta V_0 \sin \psi' = \alpha_0 \omega \cos \psi - \frac{C_0}{k_1}$$

et :

$$\Delta V_0 \cos \psi' = C_0 \frac{k_1 - k_R}{k_1 k_R} \frac{\omega^2 \tau_c}{1 + \omega^2 \tau_c^2} \quad [88]$$

$$\Delta V_0 \sin \psi' = C_0 \frac{k_1 - k_R}{k_1 k_R} \frac{\omega}{1 + \omega^2 \tau_c^2}$$

Supposons que tous les modèles aient mêmes modules élastiques k_1 et k_R , mais des temps de relaxation différents; posons pour simplifier l'écriture :

$$\Delta \alpha_1 = C_0 \frac{k_1 - k_R}{k_1 k_R} \quad [89]$$

La vitesse de fluage totale est alors :

$$\begin{aligned} V &= \sum \Delta V \\ &= \Delta \alpha_0 \sum \left| \frac{\omega^2 \tau_c}{1 + \omega^2 \tau_c^2} \cdot \sin (\omega t + \psi) \right| \\ &+ \Delta \alpha_1 \sum \left| \frac{\omega}{1 + \omega^2 \tau_c^2} \cdot \cos (\omega t + \psi) \right| \quad [90] \end{aligned}$$

Pour caractériser la viscosité de chaque centre de déformation, faisons intervenir, comme dans le cas du fluage, un paramètre $\lambda = \frac{1}{\tau_c}$ qui varie dans le même sens que la vitesse de fluage. Appelons $\varphi(\lambda)$ la fonction de distribution de ce paramètre; en remplaçant les sommes de l'équation [90] par des intégrales, on obtient :

$$V = \Delta \alpha_1 \sin (\omega t + \psi) \int_0^\infty \varphi(\lambda) \frac{\omega^2 \lambda}{\omega^2 + \lambda^2} d\lambda \quad [91]$$

$$+ \Delta \alpha_1 \cos (\omega t + \psi) \int_0^\infty \varphi(\lambda) \frac{\omega \lambda^2}{\omega^2 + \lambda^2} d\lambda$$

Comme dans le cas du fluage, considérons une fonction de répartition parabolique $\varphi(\lambda) \simeq \lambda^{-1-m}$, et posons $u = \frac{\lambda}{\omega} = \omega \tau_0$ ($= \text{Arc. cotg } \psi'$). Il vient, à une constante de normalisation près :

$$V = \Delta \alpha_1 \cdot \omega^{1-m} \left[\sin(\omega t + \psi) \int_0^\infty \frac{u^m}{1+u^2} du + \cos(\omega t + \psi) \int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{1+u^2} du \right] \quad [92]$$

Si $0 < m < 1$, les intégrales convergent aux deux bornes. Les coefficients des termes en $\sin$ et $\cos$ sont donc constants et l'on obtient :

$$V_0 = \text{Cte } \omega^{1-m} \\ \text{tg } \psi' = \frac{\int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{1+u^2} du}{\int_0^\infty \frac{u^m}{1+u^2} du} = \text{Cte} \quad [93]$$

On retrouve ainsi exactement les lois expérimentales :

— loi de similitude (invariance de ψ') ;

— variation de V_0 en ω^r , avec $r = 1 - m$, ce qui correspond approximativement à la loi empirique [58] (chapitre cinquième, IV).

Les considérations développées dans l'annexe III sont donc valables. En particulier, la relation :

$$V_0 \cos \psi' = \alpha_0 \omega \sin \psi$$

permet de calculer l'expression $\alpha_0 \sin \psi$, qui mesure la corde horizontale de l'ellipse (OK, fig. 5), donc sensiblement le frottement interne. On voit que cette grandeur doit varier comme ω^{-m} .

En calculant l'expression de $\text{tg } \psi'$ [93] pour quelques valeurs particulières de m on voit que quand m croît de 0 à 1, ψ' décroît de $\frac{\pi}{2}$ à 0 en passant par la valeur de $\frac{\pi}{4}$ pour $m = 0,5$.

Qualitativement, ce résultat se comprend fort bien : plus m est fort et plus prédomineront dans la fonction de répartition $\varphi(\lambda)$,

les faibles valeurs de λ correspondant aux faibles valeurs de ψ' ou aux fortes valeurs de τ_0 .

D'après la formule [25], à température suffisamment élevée pour que la résistance élastique interne k_e tende vers 0, un verre doit avoir une valeur élevée de τ_0 , donc un ψ' faible, tendant vers 0 quand le verre prend un comportement « liquide ». C'est le cas pour le verre ordinaire à 575° ; les courbes de fluage n'ont pas été enregistrées à une température aussi élevée, mais on peut penser qu'à 575° le fluage atteint presque dès le début un régime stationnaire, c'est-à-dire que m tend vers 1 ; il y a donc accord avec les résultats des calculs que nous venons de faire.

Pour toute une série de corps visqueux et présentant une recouvrance importante après fluage (verre pyrex, zinc, acier sorbitique, rhodoïd) ψ' va de 40° à 70° alors que m passe de 0,5 à 0,3 environ. Tous ces résultats sont donc en bon accord avec la formule [93], comme nous l'avons signalé au chapitre cinquième (II, B, b).

L'accord cesse quand on considère des matériaux plastiques, donnant des cycles à sommets pointus, pour lesquels ψ' est faible (en moyenne avec les réserves faites au chapitre cinquième, IV, B, b) alors que, d'après les valeurs observées de m (de 0 à 0,35), la formule [93] entraînerait des valeurs de ψ' allant de 70° environ à 90°. Ceci n'est pas surprenant, car la formule [93] suppose des modèles *réversibles et linéaires*.

On peut se demander lequel des deux facteurs, non-réversibilité ou non-linéarité, l'emporte pour expliquer le désaccord.

La non-réversibilité n'est pas surprenante, car nous avons dit dès le chapitre premier que certains mécanismes de blocage des dislocations agissaient dans les deux sens. Les modèles rhéologiques correspondant devraient comporter des « patins »³⁴ ; nous avons dit au début du chapitre quatrième que nous écartions ce cas trop compliqué.

Quant à la non-linéarité, nous l'avons déjà invoquée dans le cas du fluage (A, 3°). Essayons de voir si une répartition convenable de modèles à viscosité non-linéaire permet d'expliquer certaines particularités des cycles couple-torsion quand ils tendent vers la forme à sommets pointus.

2° Modèles à viscosité non linéaire.

Considérons d'abord le cas d'un modèle de Boltzmann unique, auquel on impose une contrainte sinusoïdale. Supposons que la viscosité non linéaire soit donnée par la théorie des dislocations comme en (II, A, 2°). Ce qui permet d'écrire la formule [23] sous la forme :

$$\frac{d \varepsilon_2}{d t} = \mu s h \beta (\sigma - k_2 \varepsilon_2) \quad [94]$$

équation qui, jointe à :

$$\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$$

permet, en principe, de calculer la déformation de fluage ε_2 . Cette équation n'est pas intégrable dans le cas général. Mais on peut trouver une solution approchée si β est petit et qu'on peut limiter le développement du $s h$ à ses deux premiers termes.

$$\begin{aligned} s h \beta (\sigma - k_2 \varepsilon_2) \\ = \beta (\sigma - k_2 \varepsilon_2) + \frac{\beta^3}{6} (\sigma - k_2 \varepsilon_2)^3 \end{aligned} \quad [95]$$

L'équation [94] s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu \beta} \frac{d \varepsilon_2}{d t} = \sigma_0 \sin \omega t - k_2 \varepsilon_2 \\ + \frac{\beta^2}{6} (\sigma_0 \sin \omega t - k_2 \varepsilon_2)^3 \end{aligned}$$

Cherchons une solution du type :

$$\frac{d \varepsilon_2}{d t} = V_0 \sin (\omega t + \psi') + \zeta \sin 3 (\omega t + \psi'') \quad [96]$$

où ζ soit petit vis-à-vis de V_0 . En négligeant les termes en $\beta^2 \zeta$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu \beta} V_0 \sin (\omega t + \psi') + \frac{\zeta}{\mu \beta} \sin 3 (\omega t + \psi'') \\ = \sigma_0 \sin \omega t - \frac{k_2 V_0}{\omega} \cos (\omega t + \psi') \\ - \frac{k_2 \zeta}{3 \omega} \cos 3 (\omega t + \psi'') \\ + \frac{\beta^2}{6} \left[\sigma_0 \sin \omega t - \frac{k_2 V_0}{\omega} \cos (\omega t + \psi') \right]^3. \end{aligned} \quad [97]$$

En développant tous les calculs, on obtient une équation avec des termes en $\sin \omega t$,

$\cos \omega t$, $\sin 3 \omega t$ et $\cos 3 \omega t$. Les coefficients de ces termes contiennent 4 inconnues, ψ' , ψ'' , V_0 et ζ . On peut donc toujours les identifier à 0, et résoudre les 4 équations obtenues par rapport aux 4 inconnues.

Or, nous avons vu (cf. équation [47], chapitre cinquième, II, B) qu'une équation du type [96] correspond bien aux résultats expérimentaux quand la forme des cycles s'écarte un peu, mais pas trop, d'une ellipse.

Dans le cas d'un matériau réel, représenté par plusieurs « modèles » visco-élastiques, il faudrait encore faire la somme des contributions individuelles de chaque modèle, qui possèdent des phases différentes. Le problème devient très complexe. Nous conserverons des calculs que nous venons de faire une simple indication de tendance : un faible écart à la linéarité tend à introduire des harmoniques d'ordre 3, qui expliquent le changement de forme des cycles couple-torsion.

III. — PRINCIPE DE SUPERPOSITION DE BOLTZMANN

On fait très souvent appel en rhéologie au « principe de superposition de Boltzmann ». Nous le mentionnons ici rapidement et seulement pour montrer en quoi il diffère de la voie d'approche que nous avons utilisée jusqu'ici.

Nous ne détaillerons pas la théorie du principe de Boltzmann (voir par exemple réf. 50). Nous rappellerons simplement qu'elle fait appel à deux *fonctions mémoire*, l'une dite « de fluage », $\varphi(t)$ quand la variable imposée est la contrainte, l'autre « de relaxation », $\bar{\varphi}(t)$, quand la variable imposée est la déformation.

Si, partant à l'instant $t = 0$ du matériau à l'état de repos, on impose une contrainte suivant une loi fixée, $\sigma(t)$, la déformation qui en résulte est donnée par l'expression :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \varphi(u) \sigma(t-u) du \quad [98]$$

Si, au contraire, on impose une déformation $\varepsilon(t)$, il en résulte pour la contrainte une variation :

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t) - \int_0^t \bar{\varphi}(u) \varepsilon(t-u) du \quad [99]$$

Le principe de Boltzmann s'applique à tous les corps visco-élastiques linéaires, c'est-à-dire dont le comportement est régi par une équation linéaire reliant σ , ε et leurs dérivés. C'est le cas de l'équation [24], par exemple; aussi un corps formé d'un (ou plusieurs) modèles de Boltzmann obéit-il au principe de superposition de Boltzmann. Mais ce dernier est plus général; il cesse toutefois d'être valable pour les corps non linéaires.

Il suffit d'une expérience très simple pour déterminer, par exemple, la fonction mémoire de fluage; par exemple un essai de fluage sous charge constante et égale à l'unité. D'après [98], l'allongement enregistré est l'intégrale de la fonction φ . Pour le fluage transitoire, où $\varepsilon = \varepsilon_0 + a t^m$, la fonction φ est donc :

$$\varphi(t) = m a \cdot t^{m-1} \quad [100]$$

Remarquons en passant que les formules [98] et [100] permettent de calculer la *recouvrance* après décharge, dans un essai de fluage. On retrouve exactement la loi parabolique [45] signalée au chapitre cinquième, II, H, 5°. Il faut donc compter à l'actif du principe de superposition de Boltzmann de pouvoir rendre compte de l'ensemble des courbes de fluage et recouvrance, selon la formule indiquée à la fin du paragraphe IV, A (chapitre cinquième).

La fonction mémoire de relaxation peut de même se déterminer par un essai de relaxation. Mais on peut aussi la calculer à partir de la fonction mémoire de fluage. Les *transformées de Carson* de ces deux fonctions mémoires sont liées; leur produit est en général égal à 1⁵⁰; mais ici, du fait de la valeur infinie de $\varphi(t)$ pour $t = 0$, le calcul est un peu plus compliqué.

Gross⁵¹ a montré qu'en tenant compte de ce fait, on arrivait à une fonction de Mittag-Leffler, fonction définie par un développement en série rappelant celui d'une exponentielle, mais avec des puissances fractionnaires :

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (t^m)^n$$

Morillon⁵² a montré qu'en particulier ces fonctions étant valables pour t petit, ceci donne pour la relaxation :

$$\Phi(t) = \int_0^{\infty} \bar{\varphi}(t) dt = E(1 - K' t^m) \quad [101]$$

alors que pour les grandes valeurs de t , on trouve un autre développement asymptotique :

$$\bar{\Phi}(t) = A_1 t^{-m} + A_2 t^{-2m} + \dots \quad [102]$$

La fonction mémoire de relaxation correspondant à la fonction fluage parabolique a donc une forme complexe; *mais les deux développements qu'on en déduit pour t petit et pour t très grand correspondent très bien aux lois de relaxation empiriques trouvées plus haut* (chapitre cinquième, III, formules [55] et [55 bis]). Pour les valeurs intermédiaires de t (et parfois dès le début), nous avons vu qu'une très bonne approximation est donnée par la formule [57]; ceci peut être dû, soit à ce que cette formule représente une approximation de la fonction de Mittag-Leffler, soit à ce que, dans les corps réels, les centres de déformation visqueuse sont non linéaires, alors que le calcul fait ici suppose la linéarité.

Du point de vue formel, l'application du principe de superposition de Boltzmann, avec des fonctions mémoires en t^{m-1} , conduit à des intégrales ressemblant étrangement à celles que nous avons utilisées plus haut en II, pour sommer les déformations des centres ou « modèles » indépendants avec des fonctions de répartition du même genre, en λ^{-m-1} (formules [61], [82] et [92]), ou en β^{-p} (formule [68]). Mais cette analogie est purement formelle. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer qu'un modèle unique, donc sans fonction de répartition, ne donne lieu à aucune intégration avec notre approche, alors qu'avec le principe de Boltzmann, il fait parfaitement intervenir une fonction mémoire et une intégrale du type [98], ou [99], selon le cas.

IV. — INTRODUCTION D'UN NOUVEAU MODE DE GROUPEMENT DE MODELES VISCO-ELASTIQUES : MODELES A INTERACTIONS

A) Description du modèle et mise en équation

Les rhéologues font très souvent appel à des groupements *en série* ou *en parallèle* de modèles visco-élastiques *indépendants* (modèle de Boltzmann en particulier, qui constitue parmi les modèles simples le mieux adapté pour représenter la viscosité anélastique). Dans le cas des cristaux métalliques se déformant par déplacements de dislocations, on

démontre que les effets de ces déplacements élémentaires sont additifs, pour la déformation; ce qui exclut les groupements en parallèle. Restent les groupements en série que nous avons étudiés au paragraphe II de ce même chapitre : *la théorie des dislocations permet de choisir les paramètres physiques caractérisant la viscosité des modèles, ou centres de déformation élémentaires; nous avons montré alors qu'en choisissant une fonction de répartition convenable, de forme parabolique, on pouvait expliquer la plupart des lois expérimentales que nous avons trouvées, en tout cas en ce qui concerne :*

— le fluage sous charge (ou contrainte) constante;

— les déformations cycliques, à l'exclusion de celles où prédomine la « plasticité », c'est-à-dire celles où les cycles couple-torsion ont des sommets pointus très marqués; dans ce cas en effet le comportement du métal accuse une certaine irréversibilité qui exige dans les

ries modernes de l'écrouissage. On ne peut donc pas considérer les déplacements de dislocations comme indépendants.

Nous sommes donc conduits à imaginer un modèle rhéologique qui fasse intervenir des interactions, et à voir si ce modèle n'est pas équivalent à une somme de déformations indépendantes régies par une fonction de répartition qui soit non pas arbitraire, mais imposée par la structure même du modèle.

Un des modèles rhéologiques à interaction les plus simples que l'on puisse concevoir²¹ sera composé de centres de déformations visqueuses (ou liquides de Newton) et de parties élastiques (ou solides de Hooke) disposés en série, chacun interagissant avec ses plus proches voisins de part et d'autre.

La figure 58 représente un modèle de ce genre, dans lequel les centres de déformation, schématisés par des pistons, $P_1, P_2 \dots P_n$, sont

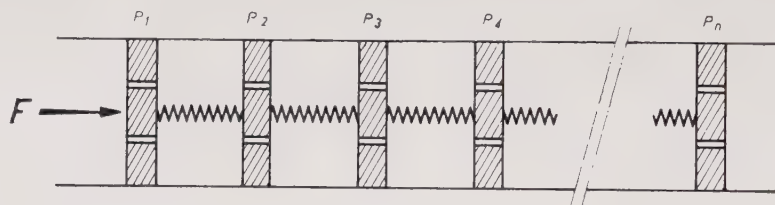


FIG. 58

Schéma du modèle rhéologique à interaction.

modèles l'intervention d' « éléments à frottement solide ».

Mais cette manière de voir nous semble se heurter à deux genres d'objections :

— la fonction de répartition invoquée est très arbitraire; il est, en particulier, surprenant qu'elle ait la même forme pour des matériaux aussi différents que des verres, des matières plastiques et des métaux. Nous avons déjà attiré l'attention à plusieurs reprises (I, A) sur cette objection;

— Dans le cas des métaux, les déformations, sauf si elles sont extrêmement petites, impliquent des déplacements de dislocations sur de longues distances; les dislocations ainsi mises en mouvement peuvent croiser ou s'approcher d'autres dislocations, immobiles ou en mouvement; il en résulte des *interactions multiples, qui sont à la base de toutes les théo-*

ries modernes de l'écrouissage. percés de trous et immergés dans un tube de liquide, de telle sorte que leur déplacement est visqueux; chaque piston est lié à ses deux proches voisins de part et d'autre par des ressorts. Lorsqu'on applique une force F à l'instant $t = 0$ sur le premier piston P_1 , les pistons commencent à se déplacer à des vitesses inégales et au bout de temps inégaux, ce qui représente la phase transitoire, jusqu'à ce que tous les ressorts soient également bandés; à ce moment, l'ensemble (ressorts-pistons) se déplace à vitesse constante dans le tube, ce qui correspond à la phase stationnaire. Il faut supposer le tube bouché à son extrémité de droite, de façon que le liquide soit immobile dans son ensemble.

En supposant que tous les pistons présentent la même résistance visqueuse à leur déplacement, de coefficient R , et que tous les ressorts ont même constante élastique, C , en appelant v_k la vitesse de déplacement et f_k la

force totale s'exerçant sur le piston d'ordre k , on met facilement le modèle en équation. On obtient le système d'équations suivant :

$$v_k = \frac{1}{R} (f_k - f_{k-1})$$

$$f_k = \frac{1}{C} \int_0^t (v_{k+1} - v_k) dt \quad [103]$$

$$R C v_k = \int_0^t v_{k-1} dt + \int_0^t v_{k+1} dt - 2 \int_0^t v_k dt$$

Ce système d'équations suggère d'ailleurs une analogie électrique immédiate : en remplaçant la force par le potentiel, les viscosités par des résistances ohmiques, les contraintes par des capacités, on aboutit au schéma de la figure 59, représentant un filtre électrique d'un type très simple.

Signalons en passant que Terzaghi⁵³ a suggéré indépendamment un modèle de ce genre pour présenter les propriétés rhéologiques des argiles; mais il n'en a pas développé les calculs ni déduit les conséquences quantitatives pour la forme de la composante transitoire. D'autre part, Kennedy⁵⁴ a eu l'idée directement d'étudier le fluage avec un modèle analogue électrique du genre de celui de la

Si, au temps $t = 0$, on applique une force $F = F_0$, la loi de variation de la force en fonction du temps peut être définie par l'équation suivante :

$$F(t) = F_0 Y(t) \quad [104]$$

où la fonction $Y(t)$ représente ce que l'on appelle l'échelon-unité, fonction nulle pour les temps négatifs et égale à 1 pour les temps positifs. Prenons pour simplifier l'écriture une unité de temps égale à $RC/2^*$, ce qui revient à utiliser une variable $\tau = \frac{2}{RC} t$; en écrivant l'équation [103] pour les différents pistons composant le modèle, on obtient le système d'équations intégrales :

$$2 v_1 + \int_0^\tau v_1 d\tau - \int_0^\tau v_2 d\tau = \frac{2}{R} F_0 Y(\tau)$$

.....

$$2 v_m + 2 \int_0^\tau v_m d\tau - \int_0^\tau (v_{m+1} + v_{m-1}) d\tau = 0. \quad [105]$$

.....

$$2 v_n + \int_0^\tau v_n d\tau - \int_0^\tau v_{n-1} d\tau = 0.$$

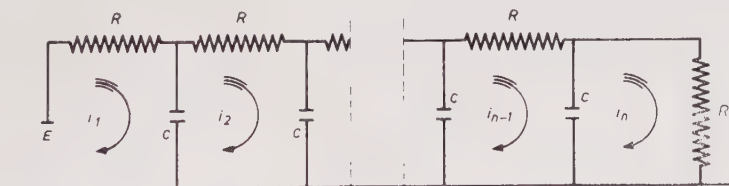


FIG. 59

Analogie électrique du modèle de la figure 58.

figure 59, qu'il a même compliqué dans certains cas; malheureusement il a utilisé pour l'analyse de la forme des courbes de fluage une méthode incorrecte, du genre des méthodes « globales » que nous avons critiquées plus haut; d'autre part, il n'a pas justifié l'emploi de son filtre par un modèle rhéologique obéissant aux mêmes équations; et enfin il a utilisé pour la réponse transitoire de son filtre, même le plus simple, une formule mathématique incorrecte.

Ce système d'équations linéaires est facile à résoudre de proche en proche en partant de la dernière équation. C'est dans le fait même que l'on porte dans une équation la valeur déduite d'une équation voisine, que réside le couplage entre les mouvements des pistons

* Cette unité des temps est en fait le temps de relaxation τ_0 de la cellule élémentaire composant ce modèle.

successifs traduisant précisément les interactions que nous cherchions à introduire dans le modèle.

Par cette méthode on obtiendrait une équation différentielle linéaire d'ordre n , dont la solution générale est facile à trouver : c'est une somme d'exponentielles décroissantes en fonction du temps. Mais les coefficients de ces exponentielles correspondant aux conditions aux limites imposées sont assez difficiles à déterminer par cette manière. Il est plus simple d'avoir recours au calcul symbolique, comme le suggère tout naturellement l'analogie électrique signalée plus haut. J. Mandel a d'ailleurs souligné l'utilité de ce calcul dans l'étude du comportement visco-élastique des matériaux ^{50, 55}. Dans ce calcul, on substitue à la variable τ la variable p reliée à la précédente par la transformation de Laplace. Cette transformation substitue au système d'équations différentielles [105] un système d'équations algébriques linéaires

$$\begin{aligned} (2p + 1) v_1(p) - v_2(p) &= \frac{2Fo}{R} \\ \dots\dots\dots \\ (2p + 1) v_m(p) - v_{m-1}(p) - v_{m+1}(p) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ (2p + 1) v_n(p) - v_{n-1}(p) &= 0 \end{aligned} \quad [106]$$

Nous n'insisterons pas sur la solution de ce système qui a été détaillée ailleurs ²². En revenant à la variable τ , on trouve finalement pour la vitesse du premier piston la solution suivante :

$$v_1(\tau) = \frac{Fo}{nR} Y(\tau) + \frac{2Fo}{nR} \quad [107]$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right) e^{-\left(1 + \cos \frac{k\pi}{n}\right)\tau} \right]$$

Le premier terme de cette expression correspond à la composante stationnaire de la vitesse et le deuxième terme à la composante transitoire.

Si au lieu de calculer la vitesse du premier piston, on veut calculer la somme

$$v_1 + v_2 + \dots v_n$$

des vitesses de tous les pistons, on trouve une composante transitoire qui a pour expression :

$$\frac{4Fo}{nR} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-\left(1 + \cos \frac{k\pi}{n}\right)\tau} \quad [107]$$

Pour n grand, ces deux expressions tendent respectivement vers les valeurs suivantes :

$$\frac{Fo}{R} e^{-\tau} [I_0(\tau) + I_1(\tau)] \quad [109]$$

$$\frac{Fo}{R} e^{-\tau} I_0(\tau) \quad [110]$$

où les fonctions I_0 et I_1 sont des *fonctions de Bessel modifiées* d'ordre 0 et 1. Pour τ grand, on sait que ces expressions tendent vers une loi parabolique en $\tau^{0,5}$. La figure 60 représente les variations de ces deux fonctions; on voit qu'elles tendent bien vers la loi en $\tau^{0,5}$, pour les valeurs assez élevées de τ : mais pour un intervalle de temps τ allant de 1 à 50 par exemple on peut encore représenter ces fonctions par des lois paraboliques à exposant légèrement différent, correspondant à des lois de déplacement en $m = 0,53$ (déplacement du premier piston, ou $m \approx 0,4$ (somme des déplacements des pistons)).

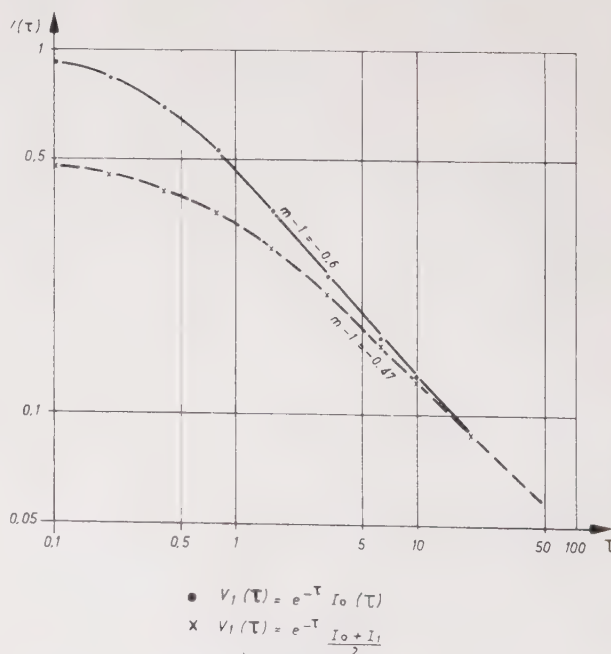


FIG. 60

Représentation des deux fonctions de Bessel, représentant le terme transitoire pour n infini; $\log V$ en fonction de $\log \tau$.

Dans le cas où n ne peut pas être considéré comme très grand, il faut calculer numériquement les sommes d'exponentielles de l'expression [107]. La figure 61 représente le cas où $n = 5$; on a d'ailleurs fait figurer deux cas: la courbe supérieure représente le cas normal correspondant exactement à l'équation [107];

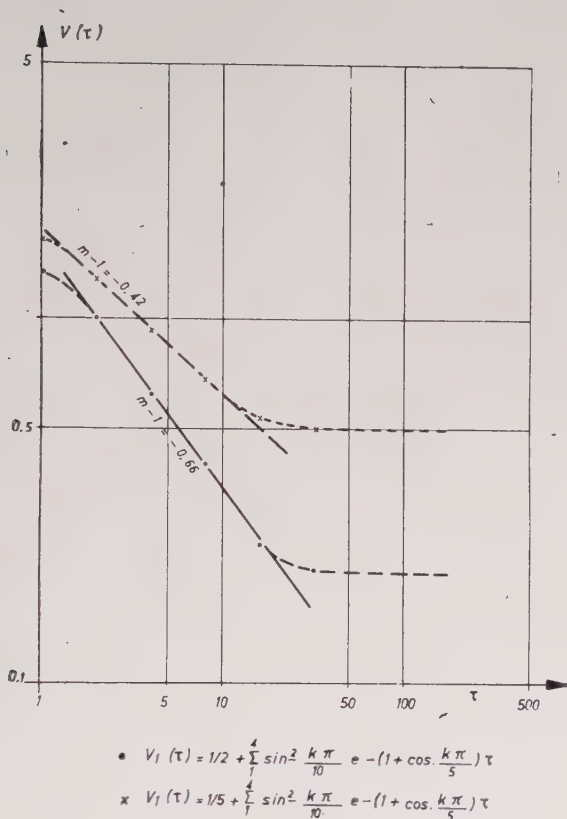


FIG. 61

Solution numérique du modèle, pour $n = 5$;
 $\log V$ — $\log \tau$.

la courbe inférieure représente un cas où l'on suppose que le dernier piston a une résistance visqueuse plus forte que les autres; cette modification a une répercussion sur la partie parabolique de la courbe, comme on le voit sur cette figure: *une augmentation de la dernière résistance a pour effet d'élever m .*

On remarque que le modèle proposé répond à une des conditions que nous énoncions plus haut: il fournit un terme transitoire qui débute par une vitesse finie, qui est ensuite représentée pendant un intervalle de temps plus ou moins étendu par une fonction parabolique et qui, finalement, s'efface pour faire place à la composante stationnaire.

Les calculs directs sont un peu fastidieux, et ne permettent facilement, ni de changer la valeur de certains paramètres (introduction d'une ou plusieurs « résistances » différentes des autres), ni d'introduire des modifications plus profondes dans la disposition des cellules élémentaires ou le type de résistance (par exemple si l'on veut que les résistances représentent une viscosité non linéaire).

B) Modèle analogique électrique

1° Modèle simple.

C'est pourquoi il est intéressant de recourir à l'analogie électrique de la figure 59. C'est ce qui a été fait* en utilisant des résistances R de 1 mégohm et des capacités C de 10 microfarads, ce qui donne une constante de temps $\tau_1 = \frac{RC}{2} = 5$ s; il suffit alors d'utiliser un enregistreur avec une constante de temps plus courte; on a utilisé à cet effet un « Speedomax », branché aux bornes d'une résistance faible mise en série, à l'entrée E (fig. 59) du

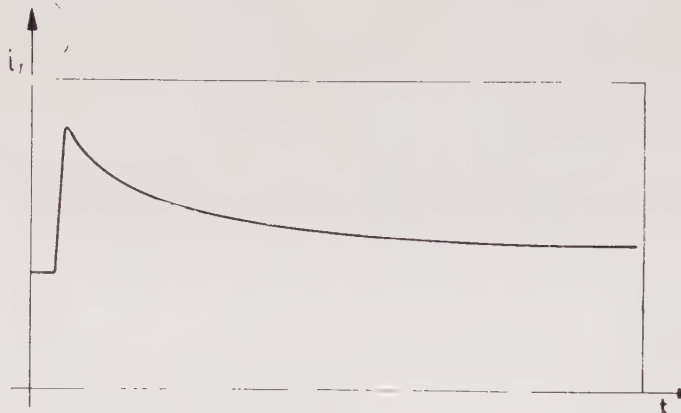


FIG. 62

Exemple d'enregistrement potentiométrique du courant dans l'analogie électrique de la figure 59.

modèle, et mesurant ainsi le courant i_1 passant dans la première maille du réseau. La figure 62 donne un exemple de courbe enregistrée de cette façon.

* Les modèles électriques ont été construits et les mesures exécutées par M. T. Pech, stagiaire à l'IRSID. Dans ce modèle, les résistances électriques représentent les résistances visqueuses, les capacités représentent les ressorts et les intensités représentent des vitesses de déplacement (ou les quantités d'électricité des déplacements).

On a fait varier le nombre de cellules, n , de 4 à 10, ainsi que la valeur de la résistance finale ($R_n = \infty$ indique que la dernière cellule est en circuit ouvert) et celle de la résistance de la première cellule, que dans certains cas on a prévu égale à la moitié ou au tiers de la résistance ($R = 10\text{ M}\Omega$) des autres cellules. Les figures 63 et 64 représentent l'analyse de ces courbes en diagramme double logarithmique (log de l'intensité, qui est proportionnelle à la vitesse du premier piston, V_1 , en fonction du log du temps). Le tableau XXIII résume les principaux résultats en ce qui concerne la valeur de l'exposant m et la durée de la partie parabolique.

Lorsque toutes les cellules sont identiques, on retrouve les valeurs de m voisines de 0,5 données par le calcul direct. Par contre, en abaissant la résistance de la cellule d'entrée, on voit que m baisse à des valeurs de 0,4 ou même un peu inférieures, en même temps que croît l'intervalle de temps sur lequel la loi

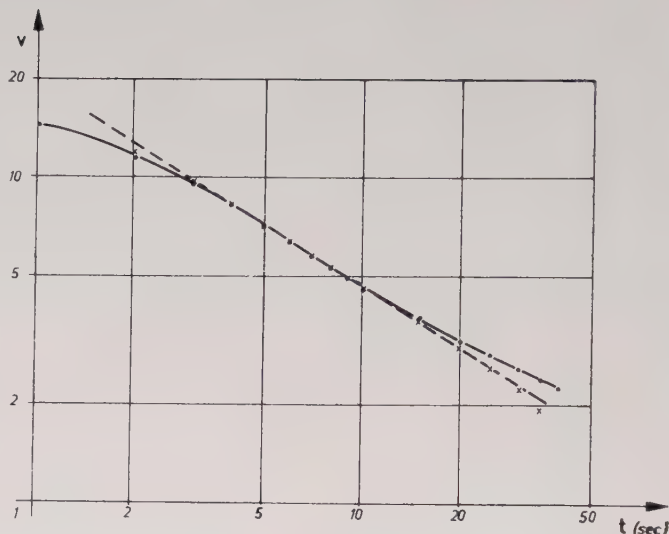


FIG. 63

Enregistrement potentiométrique, représenté en coordonnées double log. Cas $R_1 = \frac{R}{\epsilon}$, R_n infini;
 $n = 4$ (croix) et 10 (points).

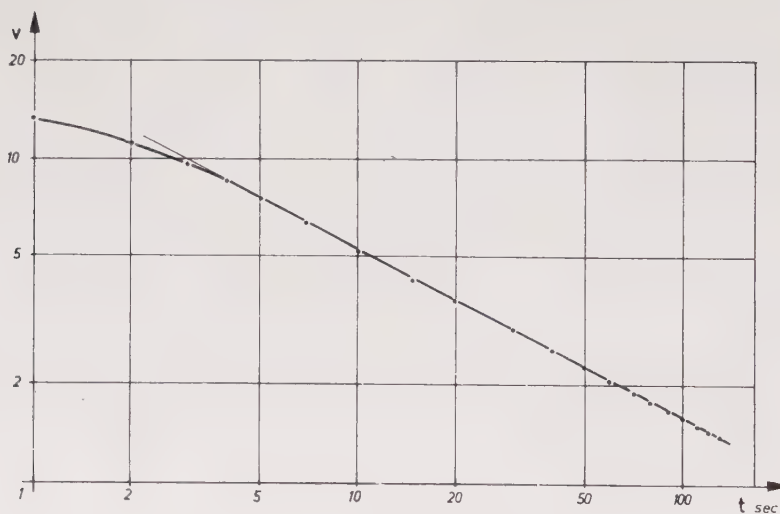


FIG. 64

Enregistrement potentiométrique en coordonnées double log;
cas $n = 10$, $R_1 = \frac{R}{2}$, R_n infini.

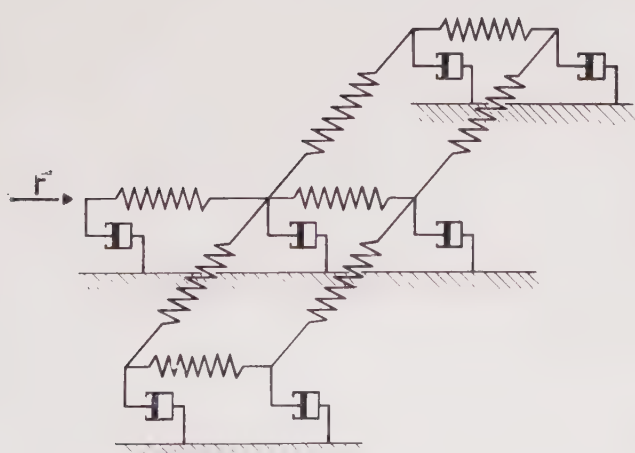
parabolique est valable. Le nombre de cellules, n , n'a guère d'influence sur la valeur de m , mais agit sur l'étendue de la partie parabolique, qui devient considérable dès que n atteint ou dépasse 8. On remarque d'ailleurs, en comparant les deux premiers groupes, que la valeur de la résistance de fermeture a très peu d'influence sur les courbes enregistrées dès que $n \geq 6$; il est donc probable que, pour

$n = 8$ ou 10, les parties paraboliques s'étendent vers des temps beaucoup plus longs que 60 secondes, bien que l'enregistrement n'ait pas été poussé jusque-là.

On peut aussi introduire dans le modèle proposé d'autres modifications plus importantes. Nous en avons étudié quelques-unes, dont les descriptions suivent.

TABLEAU XXIII

n	R_1	R_n	m	DURÉE de la partie parabolique en s
10	R	R	0,53 - 0,55	de 5 à > 60
8			0,53	de 5 à > 50
6			0,53 - 0,55	de 8 à 60
4			0,57 - 0,58	de 5 à 40
10	R	∞	0,53	de 7 à > 60
8			0,53 - 0,54	de 7 à > 60
6			0,52 - 0,54	de 7 à 30
10			0,43 - 0,47	de 3 à > 120
8	$\frac{R}{2}$	∞	0,46 - 0,48	de 3 à 120
6			0,44 - 0,45	de 3 à 40
4			0,43	de 3 à 18
10	$\frac{R}{3}$	∞	0,37 - 0,4 et après 0,48	de 2 à 10
8			0,36 - 0,37 et après 0,48	de 2 à 10
6			<i>id.</i>	de 8 à 110
4			0,36 - 0,37	de 2 à 30



parties fixes du modèle situées en fait dans un même plan
 résistance visqueuse
 ressort

FIG. 65

Modèle rhéologique « en éventail ».

2° Modèle en éventail.

On peut imaginer que chaque cellule, au lieu de transmettre l'effort à une seule cellule, le répartisse sur plusieurs cellules en parallèle. On aboutit ainsi à des schémas tels que celui de la figure 65, ou encore plus compliqués. Le modèle électrique équivalent est représenté sur la figure 66. La force (ou le potentiel) transmise par la première cellule se divise à l'étage suivant entre 3 ressorts (ou condensateurs) et ainsi de suite.

On obtient ainsi la courbe de la figure 67, correspondant à une partie parabolique assez courte où $m = 0,23$.

3° Modèles à résistances non linéaires.

En remplaçant les résistances ohmiques ordinaires par des semi-conducteurs, on peut représenter de façon analogique des viscosités

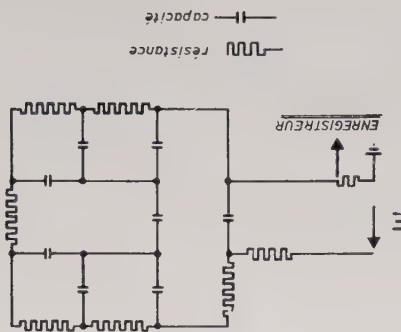
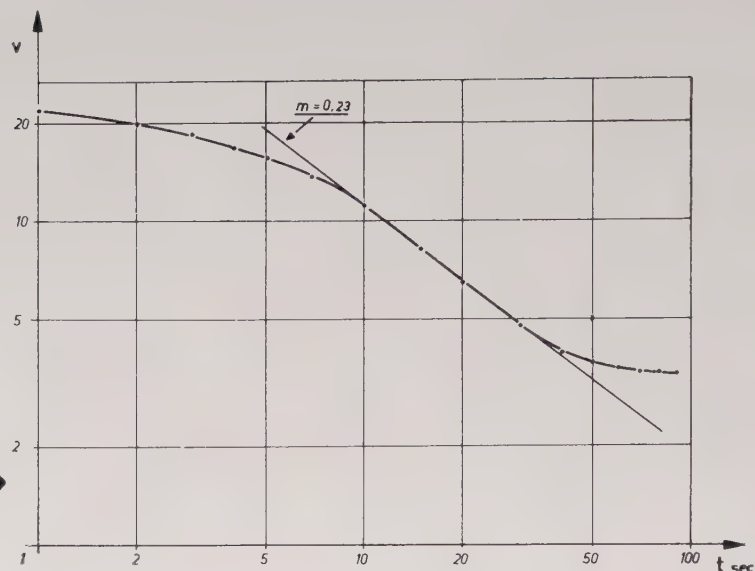


FIG. 66
Analogie électrique du modèle
de la figure 65.

FIG. 67
Enregistrement potentiométrique
coordonnées en double log.
Modèle en éventail.



non linéaires. Nous avons utilisé des diodes au germanium (type 1 N 63) dont les caractéristiques ont été relevées individuellement; la figure 68 en donne un exemple. Leur dispersion étant assez forte (rapport des valeurs extrêmes égal à 4), ces résistances non linéaires ont été « normalisées » en les complétant par des résistances en série et en parallèle. On sait, en effet ⁵⁶, que ces diodes au germanium ont des résistances R' variables en

fonction du voltage appliqué u , selon une formule du genre :

$$R' = \frac{R_{\max.} R_o}{R_{\max.} + R_o e^{gu}} R_{\min.} \quad [117]$$

La normalisation consiste à mettre effectivement en série et en parallèle des résistances convenables, de façon que les paramètres $R_{\max.}$ et $R_{\min.}$ aient même valeur pour toutes les diodes. Nous avons fait porter la normalisation sur $R_{\min.}$ seulement (résistance en série) et obtenu par cette méthode, pour les 10 diodes employées, des résistances groupées dans la bande de dispersion représentée figure 69.

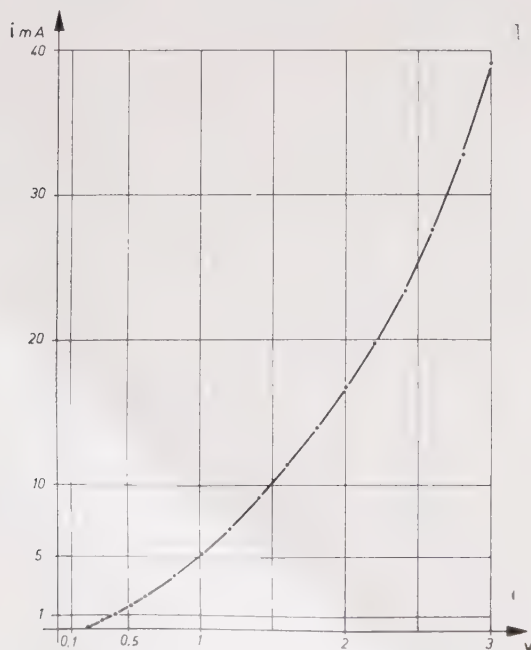


FIG. 68

Caractéristique (intensité-potential) d'une des résistances non linéaires employées (diodes au germanium).

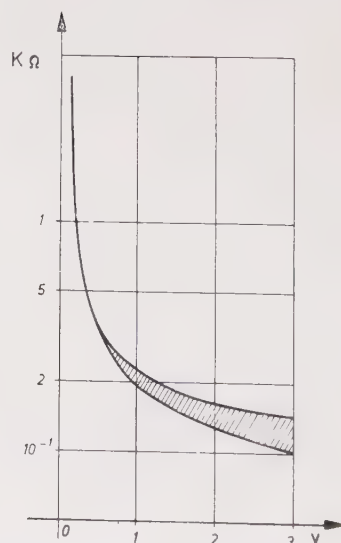


FIG. 69

Bandes de dispersion des caractéristiques (résistance-potential) des diodes employées, après normalisation.

On remarque que ces courbes correspondent à une relation intensité (i) - tension (u) qui, sauf aux très fortes valeurs de u , est assez bien représentée par une loi (voir aussi figure 68) :

$$i = u \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} e^{gu} \right) \quad [127]$$

Cette loi représente assez bien, *mutatis mutandis*, les relations liant la vitesse de fluage à la contrainte dans le cas non linéaire (voir par exemple formule [73]).

Un filtre simple, du type de celui de la figure 59, a d'abord été construit en y remplaçant la résistance R par les résistances non linéaires normalisées que nous venons de décrire. Le voltage appliqué était de 2 volts, les capacités de $57 \mu F$, et les résistances R_{min} (après normalisation) d'environ 125 ohms, d'où résultait une pseudo-constante de temps τ_1 de 7,2 millisecondes. L'enregistrement était donc fait photographiquement sur oscillo-

graphe cathodique (CRC). Le dépouillement direct, à partir des enregistrements photographiques, a fourni des parties paraboliques correspondant à des valeurs de m indiquées au tableau XXIV, où sont également reportées les durées D (en unités τ_1) jusqu'où la loi parabolique est valable (cette loi débute vers des temps de l'ordre de 0,1 à 0,3 τ_1).

On voit que, malgré une certaine dispersion (dont les essais pour $n = 4$ donnent une idée), les valeurs de m se groupent bien entre 0,2 et 0,29. Cette loi parabolique est valable dans un intervalle de temps étendu; mais pour certains essais ($n = 9$ et 10), elle cède la place à une autre loi à exposant m un peu plus faible. La nature de la résistance de fermeture ne semble pas avoir une grosse influence.

Un essai avec 10 cellules en prenant des résistances ohmiques égales, sauf la seconde, R_2 , remplacée par une résistance non linéaire, donne $m = 0,42$ dans un intervalle de temps étendu (de 1 à plus de 40).

TABLEAU XXIV

n	RÉSISTANCE FINALE	m	D (en unités τ_1)
3	infinie	0,22	2,5
	non linéaire	puis — 0,59 0,23	> 8 3,5
4	infinie	0,27	2,2
		puis 0,11	> 11
	id.	0,23	7
	id.	0,21	7
	id.	0,27	5
	id.	0,25	7
6	non linéaire	0,23	21
8	infinie	0,21	13
	non linéaire	0,27	17
9	infinie	0,28	13
		puis 0,09	70
	non linéaire	0,24	8
		puis 0,08	33
10	infinie	0,19	16
		puis 0,12	55
	non linéaire	0,27	21
		puis 0,1	105

Un essai avec un *modèle en éventail* du type de celui de la figure 66 a donné une valeur initiale de $m = 0,16$, valable jusqu'à une unité τ_1 , cédant ensuite la place à une courbe *hyperbolique* ($m = -0,47$), valable de 1 à $22 \tau_1$.

La recouvrance a été étudiée en utilisant des diodes placées « tête-bêche » (modèle en push-pull). Avec 5 groupes de ce genre, en circuit ouvert à l'extrémité, on obtient :

Pour le courant de charge $m = 0,23$ valable jusqu'à $16 \tau_1$;

Pour le courant de décharge en retour :

$m = 0,21$ jusqu'à $0,4 \tau_1$
 puis $m = 0,20$ jusqu'à $0,85 \tau_1$
 puis $m = 0,9$ jusqu'à $11 \tau_1$

4° Sollicitations cycliques.

On peut appliquer à l'entrée d'un des filtres utilisés un potentiel sinusoïdal, avec un géné-

de temps τ_1 de 0,01 s, on obtient les courbes de la figure 70. La courbe obtenue avec des résistances toutes égales présente un maximum assez aigu. Mais celles tracées avec une résistance d'entrée trois fois plus petite que les autres sont d'autant plus aplaties que le nombre de cellules est grand; pour $n = 10$, le maximum est plat sur un intervalle de fréquences considérables (de 0,5 à 16 herz). En multipliant le nombre de cellules, on déplace le maximum vers des fréquences plus basses.

On remarque que les valeurs de ψ' au maximum correspondent bien à celles trouvées expérimentalement pour les matériaux à recouvrance forte (tableau XXII).

Un essai avec un modèle en éventail a donné un maximum qui reste aigu.

En utilisant un montage à résistances non linéaires, montées en tête-bêche (comme pour l'étude de la recouvrance en 3°), on peut enregistrer directement le courant produit par

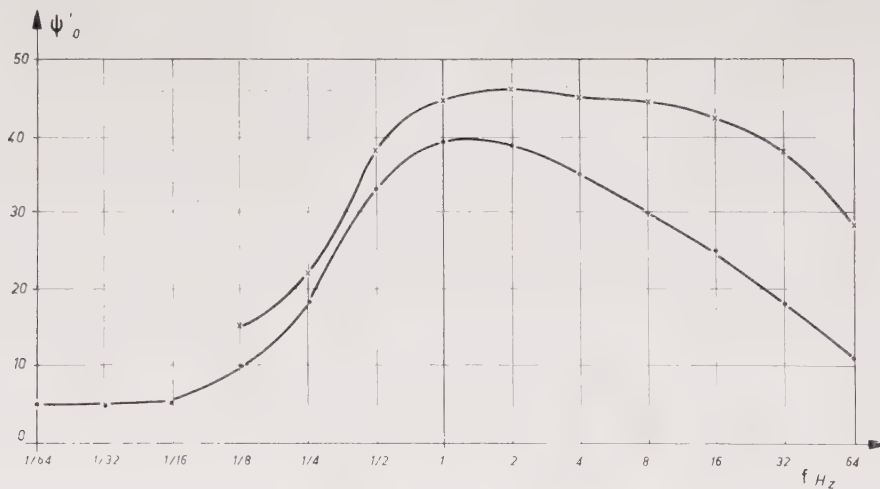


FIG. 70

Variation du déphasage ψ' avec la fréquence f .
 Courbe inférieure (points) : résistances toutes égales. Courbe supérieure (croix) : $R_1 = \frac{R}{3}$, $n = 10$.

rateur adéquat, et mesurer pour diverses fréquences le déphasage entre courant et potentiel, qui correspond à l'angle ψ' .

Avec un filtre simple (fig. 59) et des résistances $R = 0,9 \text{ M}\Omega$ et des capacités de $C = 0,0095 \mu\text{F}$, correspondant à une constante

un potentiel sinusoïdal. On obtient ainsi une courbe périodique avec un harmonique d'ordre 3 très développé; cette forme correspond bien aux variations de la vitesse de fluage déduites des enregistrements des cycles de torsion, dans des cas non linéaires. L'influence de la fréquence dans ce cas n'a pas été étudiée.

5° Relaxation.

La relaxation correspondrait au cas où, ayant chargé le modèle d'une certaine quantité d'électricité, on enlève à un moment le potentiel appliqué à l'entrée, que l'on remplace par un voltmètre en circuit ouvert. Cet essai n'a pas été effectué, et il semble difficile d'en conjecturer *a priori* le résultat.

V. — EXAMEN DES RESULTATS OBTENUS AVEC LES MODELES A INTERACTION.

INTERPRETATION PHYSIQUE.

Les modèles à interaction que nous venons de décrire représentent bien le comportement de matériaux dont le fluage se déroule de la façon suivante : un certain nombre de glissements s'amorcent localement et s'étendent sur des surfaces (ou plans) de glissement, par mouvements de dislocations; ces dislocations viennent buter sur des obstacles *préexistants*, et s'accumulent devant des obstacles, mais sont capables de les contourner, par un processus faisant appel à la diffusion, qu'on peut donc qualifier de « visqueux », par exemple la « montée » des dislocations, notamment des dislocations de tête des empilements, fortement pressées contre les obstacles. Après avoir ainsi contourné les obstacles, ces dislocations, ou des bouts de ces dislocations, vont un peu plus loin s'empiler contre d'autres obstacles qu'elles peuvent contourner à leur tour, et ainsi de suite.

Dans certains cas il est possible que ce soit, non le contournement des obstacles, mais le glissement des dislocations entre les obstacles qui constitue la phase la plus longue; c'est elle dans ce cas qui définit la résistance visqueuse.

Dans une telle structure, l'analogie électrique est peut-être plus parlante que l'analogie du modèle rhéologique : le courant, déplacement d'électricité, correspondent au déplacement des dislocations; les capacités sont des obstacles capables de « loger » devant eux plusieurs dislocations; et les résistances correspondent au processus de contournement des obstacles.

La déformation d'ensemble est la somme de déformations élémentaires proportionnelles aux surfaces balayées par les dislocations à

chaque étape, en allant d'un obstacle à l'autre. Dans le modèle, la vitesse de déformation totale sera donc représentée par la somme pondérée des vitesses de déplacement de tous les pistons (avec un coefficient proportionnel à l'aire balayée à chaque étape), ou dans le modèle électrique par la somme des intensités des courants dans chaque cellule.

Si l'aire balayée dans l'étape (ou cellule) de départ, à partir de la source de dislocation, est beaucoup plus grande que les autres, la vitesse de déformation totale sera sensiblement proportionnelle à la vitesse du premier piston, v_1 , ou au courant i_1 de la première cellule, qui est précisément celui que nous avons enregistré dans tous nos essais.

Si les aires balayées dans toutes les étapes sont sensiblement égales, c'est la somme $v_1 + v_2 + \dots + v_N$ qu'il faut faire intervenir. Nous l'avons calculée par exemple dans l'expression [108], représentée sur la figure 60. On voit que cette somme donne une loi qui n'est pas très différente de la variation de v_1 seule et qui coïncide même très bien pour les valeurs assez grandes du temps; pour les valeurs plus faibles, cette somme suivra assez bien une loi parabolique avec un exposant qui tend à être un peu plus faible que celui de la loi de v_1 .

Dans ce qui suit, nous raisonnerons sur l'exposant m de la loi suivie par v_1 ; de la discussion que nous venons de faire nous retiendrons que la loi réelle devrait, dans certains cas, correspondre à une valeur un peu plus faible de m . Mais les variations de m obtenues en modifiant le modèle sont certainement significatives.

Pour que le modèle s'applique, il n'est d'ailleurs pas nécessaire que viennent s'empiler devant chaque obstacle un groupe dénombrable de dislocations distinctes (comme dans les métaux); une distribution plus ou moins continue de dislocations infinitésimales suffit.

Ce cas doit se rencontrer dans les verres et autres matières amorphes ou quasi amorphes. Dans les verres, par exemple, la déformation résulte d'un grand nombre de glissements élémentaires ne s'étendant pas loin, déclenchés par un déplacement local d'atomes, qui distend un peu les chaînes de tétraèdres SiO_4 environnantes; certaines liaisons ainsi surchargées peuvent se rompre (avec appoint d'agitation thermique, c'est-à-dire par un processus visqueux), ce qui reporte la distorsion

un peu plus loin, et ainsi de suite. Si la structure du verre comporte des « microcristallites » dont les dimensions seraient de l'ordre de 100 Å⁶², comme on l'admet souvent à l'heure actuelle, les déformations élémentaires peuvent se concentrer dans les zones séparant ces petits éléments et produire ainsi un glissement relatif, non de deux atomes, mais de deux cristallites. Quoi qu'il en soit, l'image du modèle de la figure 58 s'applique parfaitement à un tel mécanisme.

Ce modèle, avec des éléments semblables en nombre ≥ 6 , donne un exposant $m = 0,5$ à 0,55. C'est bien ce que l'on observe pour le verre pyrex recuit, à l'état stable. Si le nombre de « cellules » en interaction n'est pas trop grand, le fluage transitoire doit faire place au bout d'un certain temps au fluage stationnaire comme on l'observe en fait.

D'autre part, les verres donnent en torsion cyclique une variation du frottement interne avec la fréquence (tableau XIX) qui rappelle assez l'allure des courbes obtenues sur le modèle électrique (fig. 70, portion de la courbe pour $R_1 = R$ située à droite du maximum).

Il semble donc que des modèles à interactions, comportant chacun un petit nombre d'éléments identiques, à viscosité linéaire, rendent bien compte de la rhéologie du verre à l'état recuit.

Dans la plupart des autres matériaux étudiés, l'exposant du fluage, m , est inférieur à 0,5. Quelles sont, d'après les indications du paragraphe IV, les modifications du modèle qui peuvent entraîner un abaissement de m ? En dehors du fait de remplacer v_1 par la somme $v_1 + v_2 \dots v_n$, nous trouvons :

- 1) Remplacement du modèle simple par un modèle « en éventail » (fig. 65 et 66).

Mais un tel modèle a pour conséquence, dans une sollicitation cyclique, un pic aigu sur la courbe donnant les variations de ψ' ou de frottement interne avec la fréquence. Ce n'est pas le cas dans les matériaux que nous considérons ici. On peut donc écarter ce genre de modèles.

- 2) Modèle à éléments linéaires, mais où la première résistance R_1 est inférieure aux autres, de valeur R .

Le tableau XXIII montre qu'on peut ainsi abaisser m ; pour $R_1 = \frac{R}{3}$, on atteint déjà

$m = 0,36$. La partie parabolique correspondante s'étend sur un intervalle de temps très satisfaisant.

Comment expliquer, dans un tel modèle, la variation de m avec la température? Il faut admettre que la première résistance (R_1) et les suivantes (R) sont gouvernées par des phénomènes distincts possédant des énergies d'activation différentes. Si celle de R_1 est plus faible que celle de R , quand la température croît, R_1 décroît moins vite que R , donc R_1/R va croître, ce qui correspond à une croissance de m (d'après le tableau XXIII). Il est très vraisemblable que la structure réelle des métaux corresponde à ce schéma, la première résistance représentant l'activation d'une source (de Frank-Read par exemple) ou le glissement freiné des dislocations, et les suivantes la montée des dislocations contournant les obstacles; l'énergie d'activation de la source peut en outre être fonction de la contrainte, ce qui expliquerait les variations de m avec la contrainte.

D'autre part, en torsion cyclique, l'introduction d'une première résistance $R_1 < R$ étale le maximum de ψ' en fonction de la fréquence (fig. 70); nous avons vu en IV, 4°, que la valeur de ce maximum plat correspondait bien à celles que l'on observe pour les matériaux à recouvrance importante.

On voit que cet étalement exige un assez grand nombre de cellules en interactions; en choisissant un nombre de cellules et une valeur de R_1/R convenables, on peut espérer obtenir un déphasage ψ' constant dans un large intervalle de fréquences, comme on l'observe en réalité.

Remarquons à ce sujet qu'un modèle linéaire à n cellules, quelles que soient leurs résistances, a pour solution générale une somme de n exponentielles avec des coefficients dépendant de la structure du modèle. Si n est grand, cette somme équivaut à une intégrale, avec une certaine fonction de répartition (sauf pour les valeurs de t très petites ou très grandes). Si cette intégrale est une fonction parabolique du temps, cela signifie qu'elle est représentable par des équations analogues à [60] et [61], c'est-à-dire que cette fonction de répartition fictive est équivalente à une fonction en $\lambda^{-1} - m$ (sauf pour t très petit ou très grand). Il en résulte que les calculs du paragraphe II, C, sont valables, ce qui d'après [92] et [93] doit conduire à un ψ' constant (sauf pour les fréquences très grandes ou très petites).

La figure 70 montre qu'on obtient cette constance de ψ' plus facilement (c'est-à-dire avec des n plus petits) quand $R_1 < R$.

Il y a en somme une équivalence formelle entre la solution du modèle à interactions et les intégrales du paragraphe II, quand le nombre de cellules est assez grand.

3) Modèle à résistances non linéaires.

Le remplacement des résistances ohmiques par des semi-conducteurs fait, nous l'avons vu, tomber l'exposant m à des valeurs de l'ordre de 0,25. Ces valeurs sont bien de l'ordre de celles observées sur les aluminiums impurs; mais elles sont trop faibles pour correspondre aux valeurs de 0,3 - 0,4 couramment observées sur des métaux purs (par exemple sur Al, Zn, Mg). Or la caractéristique de la figure 68, tout en ressemblant à la loi en sinus hyperbolique (de la formule [73] par exemple), ne présente presque pas de partie linéaire au début. Il est donc très probable qu'avec une résistance à caractéristique véritablement en sh, on obtiendrait des valeurs de l'ordre de 0,3-0,4.

Dans un modèle de ce genre, la variation de m avec la température provient de ce que, plus la température est élevée, plus les contraintes en jeu sont faibles, de sorte que l'on tend de plus en plus à travailler dans les parties linéaires de la formule [73], donc de la caractéristique des semi-conducteurs; ce qui entraîne une élévation de m .

Au contraire, pour les métaux fluant à température « relative » basse, comme le cuivre (chapitre cinquième, I, D), les valeurs très basses observées pour m (0,13) peuvent sans doute s'expliquer parce qu'on est dans une portion encore moins linéaire des caractéristiques. Il est possible que des courbes de ce genre, ou même logarithmiques, puissent être obtenues par une combinaison de deux facteurs (résistances non linéaires et $R_1 < R$). Il est aussi possible (chapitre cinquième, I, E, G et H, 3), comme nous l'avons fait remarquer, que les courbes logarithmiques soient en réalité le résultat de la superposition d'un terme parabolique et d'un terme hyperbolique; ce dernier peut être obtenu par un « modèle en éventail » de résistances non linéaires, correspondant à un processus de « multiplication » ou « d'avalanches » de dislocations au début de la déformation.

Une croissance de la charge, dans la formule [73], correspond aussi à une résistance de moins en moins linéaire et qui doit entraîner une baisse de m ; c'est bien ce que l'on

observe pour le cuivre, le nickel, le zinc brut de laminage, le zinc recuit à gros grains, l'aluminium monocristallin et l'aluminium polycristallin aux plus fortes charges.

Il faut toutefois signaler qu'on observe une variation en sens contraire pour le zinc à grain fin et pour l'aluminium à l'ambiante. Il est vrai que dans ce dernier métal la forme des courbes présente une anomalie.

Pour des cycles couple-torsion, l'étude de ces modèles électriques non linéaires n'a pas été très poussée. Nous avons vu (IV, B, 4°) qu'ils rendent bien compte de la déformation des cycles lorsque ceux-ci ne sont pas elliptiques. Mais nous n'avons pas étudié systématiquement la variation du déphasage ψ' avec la fréquence.

On peut néanmoins étendre au cas non linéaire les raisonnements faits à la fin du paragraphe précédent (2). Il suffit en effet, dans la première équation [103], de remplacer ($R v_k$) par une certaine fonction $g(v_k)$ traduisant la loi de viscosité non linéaire; par exemple :

$$g = \text{Arg sh}$$

Le système d'équation [105] sera donc remplacé par des équations du genre :

$$2 \text{ Arg sh } v_m$$

$$+ 2 \int_0^\tau v_m d\tau - \int_0^\tau (v_{m+1} + v_{m-1}) d\tau = 0.$$

Bien que les transformées de Laplace de ces équations soient plus compliquées à écrire, elles conduiront toujours à un système de n équations à n inconnues, dans les coefficients numériques desquels entre p .

Il en résulte que v_1 aura une certaine expression en p à laquelle correspond, par la transformation de Laplace, une certaine loi en t ; pour t grand, où les différences $f_k - f_{k+1}$ sont évidemment faibles, cette loi doit être équivalente à une somme d'exponentielles; elle doit donc être représentable par une somme de fonctions qui tendent vers des exponentielles pour t grand. Si, pour cette somme, les calculs du genre de ceux du paragraphe II, A, 3° sont valables, il doit en être à peu près de même pour ceux du paragraphe II, C, ce qui conduit aussi à un ψ' sensiblement constant.

On voit que l'équivalence formelle entre les solutions du modèle à interaction et les intégrales du paragraphe II doit pouvoir s'étendre au cas non linéaire moyennant quelques précautions.

**

Cherchons maintenant, d'après ce que nous savons de la structure des matériaux étudiés, dans quel cas un modèle à interaction a des chances de s'appliquer, avec les modifications $R_1 < R$ (2) ou résistances non linéaires (3) ou une combinaison des deux.

— POUR LES VERRES A L'ETAT BRUT, on doit s'attendre à ce que les résistances visqueuses soient linéaires. La faible valeur de m (0,28) trouvée à 400° sous faible charge (tableau XII) doit correspondre au cas 2). Il est en effet probable que, du fait que ce verre est à moitié trempé, il existe des centres de déformation sous contrainte interne où la déformation est plus facile, ce qui correspond à $R_1 < R$.

Les fortes valeurs de m observées dans d'autres cas (fortes charges à 400° et 500°) doivent être attribuées à une autre raison : la figure 61 montre que, plus la dernière « résistance de fermeture » (R_n) est faible, plus m est élevé; cela revient à dire que le régime stationnaire est plus facile à établir, et que cet effet se répercute sur la valeur de m . On peut donc expliquer ces valeurs de m élevées en admettant qu'il existe dans ce verre *deux sortes de centres de déformation* : ceux qui assurent le fluage transitoire et ceux qui, surchargés du fait de ce fluage, se mettent à jouer ensuite; quand la température ou la charge croît, la viscosité de ces derniers décroîtrait plus vite que celle des premiers.

— POUR LE RHODOID, il est vraisemblable qu'une explication similaire est valable pour les deux essais où $m = 0,3$ (tableau XIII). La valeur de m plus élevée (0,58) observée dans un essai doit correspondre à un cas où, pour une raison inconnue (hétérogénéité du matériau ?) les centres « instables » ($R_1 < R$) avaient disparu.

— DANS LE CAS DES METAUX, faisons d'abord une remarque préliminaire : un modèle à interaction sera valable s'il y a des *sources de dislocations entourées d'obstacles préexistants ou tout au moins se constituant dès le début de la déformation, et si les zones d'action de chaque source n'interfèrent pas*

trop entre elles : chaque source émet des dislocations dans un certain volume autour d'elle, représentant l'ensemble des « cellules » atteintes; ces volumes peuvent se recouper, à condition que dans la zone de recoupement, la déformation issue d'une source ne perturbe pas trop les lois de la déformation provenant de l'autre source qui agit dans la même zone.

On doit s'attendre à rencontrer les conditions ci-dessus :

— dans les métaux contenant des *précipités assez fins et serrés*; c'est le cas des aluminiums impurs et de l'acier sorbitique. Ces précipités constituent les obstacles devant lesquels s'empilent les dislocations.

— dans les métaux où la mise en charge produit une déformation quasi instantanée (« plastique ») suffisante pour *fragmenter le métal en un certain nombre de cellules ou sous-grains*; les parois plus ou moins parfaites séparant ces sous-grains constituent les obstacles, mais peut être aussi les sources des dislocations. C'est le cas que l'on rencontre dans les éprouvettes polycristallines d'aluminium raffiné, à charge suffisamment élevée (cf. chapitre cinquième, I, A, 5°).

— dans le cas où les principaux obstacles au déplacement des dislocations sont les joints intergranulaires. Ces joints peuvent être, non pas contournés, mais franchis par un processus lent impliquant soit une entrée des dislocations dans le joint, suivie d'une émergence de l'autre côté, soit une émission de petites dislocations par le joint, se combinant plus ou moins avec celles d'origine intracristalline. Les sources principales de dislocations peuvent également être aux joints. Mais pour que le phénomène soit pur, il faut qu'une seule catégorie de sources entre en jeu. On rencontre ce cas pour le fluage de l'aluminium polycristallin sous faible charge à 200° (TR A II 48, tableau III, sous 200 g/mm²) pour le zinc et pour le magnésium, à température pas trop élevée.

— dans le cas des métaux polygonisés, dès la mise en charge ou très rapidement après, ce qui arrive dans des métaux fluant à température relativement élevée (par exemple au-dessus de la température d'équicohésion). C'est le cas pour l'aluminium raffiné polycristallin à 200°, sous charge assez forte. Les courbes irrégulières obtenues aux charges moyennes (par exemple A II 44 et 47, tableau III) correspondent précisément au cas où la polygonisation se fait au cours du fluage et où, peut-être, deux types de sources entrent

en jeu. Quand on surcharge une éprouvette ayant déjà flué, on obtient une parabole régulière à exposant m en général plus fort (signalé pour A II et Zn); ceci s'explique aisément : le premier fluage a parachevé la polygonisation; lors de la surcharge ultérieure, le métal, étant fragmenté en sous-grains dès le début, se trouve dans un état où le modèle s'applique bien; comme les sources plus faibles ont été éliminées lors du premier fluage, m tend à croître.

Dans les deux cas précédents, où les obstacles principaux sont constitués par des joints ou par des sous-joints, il est fort possible que les dislocations ne franchissent pas effectivement cet obstacle, mais qu'on ait affaire au mécanisme suivant : une source émet des dislocations qui viennent s'empiler contre le premier obstacle joint ou sous-joint; les dislocations de tête des empilements peuvent ensuite « entrer » dans ce joint, ou sous-joint, et s'y fondre. C'est-à-dire que, par une série de processus de diffusion, les contraintes internes de la dislocation se répartissent et s'étalent dans le joint (ou sous-joint); ce qui revient à soustraire la dislocation du premier empilement, par une cascade de processus « visqueux ». Dans ce cas, le modèle à interaction s'applique très bien, la déformation d'ensemble étant proportionnelle à l'aire balayée par les dislocations quand elles traversent le grain, c'est-à-dire *simplement au déplacement du premier piston*; les valeurs de m trouvées dans tout ce qui précède sont alors quantitativement valables. La seule difficulté, s'il y a plusieurs sources actives par grain (ou sous-grain), provient des interférences possibles entre sources.

— enfin, dans les monocristaux, le modèle doit encore s'appliquer avec quelques précautions, les obstacles étant constitués par les barrières de Lomer-Cottrell (ou autres dislocations sessiles) formées à la mise en charge.

Pour tous ces métaux, on est en général dans un domaine non linéaire; c'est donc les considérations du paragraphe 3 qui jouent, complétées à l'occasion par les modifications (2) ($R_1 < R$).

ACIER SORBITIQUE. — Examinons de plus près le cas de l'acier sorbitique, qui a été étudié assez en détail, et qui constitue un cas particulier, puisque la forme des cycles couple-torsion est, dans une certaine marge, indépendante de l'amplitude, ce qui suggère une viscosité linéaire.

On remarque en effet que la vitesse initiale de fluage est proportionnelle à la charge, tant que celle-ci n'est pas trop forte (chapitre cinquième, I, H). Mais si l'on considère des déformations un peu plus fortes, on voit déjà que le coefficient a de la loi de fluage varie comme $\sigma_0^{1,5}$; enfin la vitesse stationnaire, quand on l'atteint, varie encore plus rapidement en fonction de la charge²⁰. Ces faits s'expliquent très facilement en admettant un modèle à interaction où la première résistance est linéaire, et les suivantes ne le sont pas; avec le modèle électrique, dans un cas du même genre (mais avec une seule résistance non linéaire remplaçant la seconde), nous avons trouvé $m = 0,42$ (IV, B, 3°); physiquement, cette structure du modèle peut très bien correspondre à la structure réelle, R_1 correspondant à l'activation de la source ou au glissement des dislocations (par exemple les portions vis contenant des crans), et les R suivants à la montée des dislocations contourant les obstacles. Remarquons que la première cellule peut correspondre au déplacement des dislocations à travers les plages ferritiques (planche I) relativement grandes (environ 2μ) où il n'y a guère de précipités; les cellules suivantes correspondraient à des déplacements beaucoup plus petits, là où les précipités sont serrés ($0,2 \mu$ environ). Dans ce cas, la vitesse de déformation totale doit être sensiblement proportionnelle à v_1 (premiers pistons), le « poids » de v_1 étant beaucoup plus grand que celui des autres vitesses, $v_2 \dots v_n$.

L'ellipticité et l'homothétie des cycles couple-torsion montre que dans ce cas c'est surtout la résistance R_1 qui entre en jeu : très probablement, au cours de l'accommodation, *les empilements de dislocations sur les précipités ont pris une disposition quasi définitive*, et la déformation mécanique est assurée par quelques bouts de dislocations simplement freinés par R_1 au cours de leur déplacement (par exemple à travers les plus grandes plages ferritiques), ce qui suggère que dans ce cas, R_1 est plutôt un freinage au cours du glissement des dislocations. L'énergie d'activation trouvée expérimentalement (chapitre cinquième, II, E) est alors de l'ordre de 75 000 cal/mole.

Si l'on considère maintenant le début des courbes de fluage sous charge constante, enregistré à grande vitesse, l'énergie d'activation correspondant à la vitesse initiale est plutôt de l'ordre de 40 000 cal/mole (chapitre cinquième, I, H, 4°). Elle est donc différente de

celle qui régit les cycles couple-torsion accomodés, et doit correspondre à un autre mécanisme, pour R_1 *. On peut penser qu'ici c'est l'activation d'une source qui intervient, ce que semblent confirmer les considérations suivantes :

La forme du début des courbes de fluage enregistrées à grande vitesse (chapitre cinquième, I, H, 1°) montre que la transition entre le fluage initial exponentiel de la partie parabolique se fait vers 10 secondes. Cela veut dire que la « constante de temps » de la première cellule est de l'ordre de 10 secondes. Pour des contraintes de 10 kg/mm², le nombre de dislocations pouvant s'empiler aux extrémités d'une plage de $2\ \mu$ est au maximum de 10^3 . Ce qui correspond à une activation de la source de dislocations par seconde. Pour une fréquence naturelle des vibrations de la source de l'ordre de 10^9 , ceci correspond à une probabilité d'activation de 10^{-9} , c'est-à-dire à la température de l'essai de 773 °K, à une énergie d'activation de $2,3 \times 9 \times 1546 = 32\ 000$ cal/mole. Cette valeur étant assez proche des 40 000 trouvés expérimentalement on a là un argument en faveur de l'hypothèse que, à la toute première déformation après traitement thermique, c'est bien l'activation des sources de dislocations qui contrôle la vitesse de déformation initiale. On peut donc dire que dans ce métal, la résistance R_1 de la première cellule (correspondant sans doute aux plus grandes plages ferritiques) est complexe, faisant intervenir à la fois l'activation des sources et le freinage des dislocations dans leur glissement, l'une ou l'autre prédominant selon que l'on affine à la toute première déformation ou à un cycle accomodé.

On comprend dans ces conditions que la courbe d'accommodation, au début d'une sollicitation cyclique, suive des lois curieuses (formules [51] à [54]) notamment en ce qui concerne l'influence de la température.

POUR LA RECOUVRANCE, la loi trouvée avec un modèle non linéaire, à éléments réversibles (IV, B, 3°), correspond qualitativement aux variations expérimentales de la figure 28 par exemple, quoique avec une échelle des temps moins étalée.

Cette étude détaillée du cas de l'acier sorbitique montre toute la puissance d'analyse

du modèle rhéologique à interaction, qui permet souvent de déterminer la disposition et certaines propriétés des dislocations intervenant dans le fluage, ainsi que de leurs sources et des obstacles qu'elles rencontrent.

Nous avons vu des exemples de cette puissance d'analyse dans d'autres métaux; citons par exemple le fluage de l'aluminium raffiné polycristallin, où l'existence d'une anomalie temporaire dans le fluage transitoire parabolique traduit l'interférence entre deux mécanismes de déformation et de consolidation : mécanisme analogue à ce qui se passe dans les monocristaux avec formation de barrières (de Lomer-Cottrell) et mécanisme d'origine intercrystalline s'accompagnant de fragmentation en sous-grains. C'est seulement quand l'un ou l'autre mécanisme prédomine nettement qu'on a des courbes paraboliques régulières.

Le modèle rhéologique à interaction est donc capable de s'adapter à toutes sortes de cas et d'expliquer dans ces conditions les lois du fluage transitoire ou des cycles couple-torsion. Mais nous devons remarquer qu'il ne prouve jamais rien : il est purement formel et permet d'éliminer certaines hypothèses et d'en rendre d'autres vraisemblables, à condition de le compléter par une interprétation physique. Aussi devons-nous nous demander où il se situe par rapport aux explications classiques de la théorie des dislocations.

Dans celle-ci, en général, on considère le déplacement d'une dislocation rencontrant un obstacle, par exemple un arbre de la « forêt de dislocations » et coupant cet obstacle par un processus activé. Pour traduire la consolidation, due à l'augmentation du nombre de dislocations arrêtées dans le métal, on fait en général intervenir soit un champ de contrainte interne croissant avec la déformation, soit une décroissance de la longueur moyenne des arcs libres de dislocations : l'interaction entre dislocations n'est donc pas détaillée, mais caractérisée seulement par un paramètre moyen.

Dans le cas d'une contrainte interne, en particulier, on peut montrer que pour les métaux purs, cette contrainte croît proportionnellement à la déformation; l'énergie d'activation du processus de franchissement de l'obstacle peut alors se mettre sous la forme :

$$U = U_0 + A(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad [113]$$

* Signalons toutefois une autre explication possible : 40 000 cal. correspondraient au glissement des dislocations fraîches, 75 000 à celui des dislocations contenant de nombreux crans.

La vitesse de fluage est donc donnée par une équation de la forme :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = V_0 e^{-\frac{U_0 + A(\varepsilon - \varepsilon_0)}{kT}} \quad [114]$$

ou, écrite avec d'autres constantes :

$$\frac{d(\varepsilon - \varepsilon_0)}{dt} = a b e^{-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{a}} \quad [115]$$

ce qui, intégré, donne le *fluage logarithmique*

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a \log(1 + b t) \quad [116]$$

Cette explication semble la plus valable si l'on observe effectivement des fluages logarithmiques s'étendant sur un grand intervalle de temps. Nous avons discuté ce point ailleurs (chapitre cinquième (I, E et G, et IV, A). Mais ce cas ne s'est jamais présenté dans nos essais; peut-être n'avons-nous pas opéré à température assez basse.

Pour expliquer le fluage parabolique avec la théorie des dislocations, plusieurs tentatives ont été faites; signalons les plus intéressantes :

— Mott⁵⁹ se place dans un cas très particulier, où la consolidation est due à des empilements à l'intérieur des sous-grains, et où les sources de dislocations sont activées chaque fois qu'une dislocation de signe convenable passe dans leur voisinage en créant un supplément temporaire de contrainte. Ce modèle ne semble vraiment pas correspondre à ce que nous savons aujourd'hui de la disposition des dislocations dans le fluage primaire; d'autre part, il est limité aux corps cristallisés; alors que nous avons vu que certains corps amorphes peuvent suivre une loi voisine de la loi d'Andrade.

— Blank⁵⁷ part du fluage logarithmique, en remarquant que, de la formule [116] on peut déduire :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \simeq N a' \frac{b}{1 + b t} \quad [117]$$

en posant $a = N a'$, où N est le nombre de dislocations participant à la déformation, sup-

posé constant dans le cas du fluage logarithmique. Blank remarque que dans beaucoup de processus de déformation plastique, il y a multiplication des dislocations. Le plus simple est d'admettre une multiplication proportionnelle à la déformation de fluage.

$$N = N_0 [1 + B(\varepsilon - \varepsilon_0)] \quad [118]$$

En portant cette expression dans [117], on en tire par intégration :

$$1 + B(\varepsilon - \varepsilon_0) = (1 + b t)^{N_0 a' B} \quad [119]$$

Cette loi est sensiblement parabolique pour des temps $t \gg \frac{1}{b}$, et linéaire au début. For-

mellement, cette théorie semble satisfaisante. En fait, elle se heurte à de graves objections : la relation [117] n'exprime pas une relation physique résultant de l'action des contraintes de consolidation sur les dislocations émises par une source, mais une expression mathématique dérivée de [116] sous l'hypothèse $N = \text{Cte}$; il ne semble pas justifié de faire ensuite varier N . Il faudrait en réalité porter l'expression [118] dans l'équation [115], ce qui aboutit à une toute autre forme de loi s'exprimant à l'aide de logarithme intégral.

Une autre objection provient de la valeur de l'exposant $N_0 a' B$: il serait extraordinaire que ce produit de 3 grandeurs, dont chacune dépend fortement des conditions expérimentales, fût presque toujours compris entre 0,2 et 0,5.

— Täubert⁵⁸ suppose que les sources actives sont progressivement bloquées au cours de la déformation, soit par une cause intrinsèque à la manière dont elles jouent, soit par les contraintes internes des boucles qu'elles émettent et qui sont arrêtées un peu plus loin. Il suppose alors un processus activé et capable de réduire ces contraintes internes (ou de les augmenter) d'une quantité donnée, faisant ainsi varier de $\pm n \Delta U$ l'énergie d'activation de la source, par sauts élémentaires de ΔU ; il en résulte, si l'équilibre thermique est réalisé au départ, une certaine loi de répartition des énergies d'activation U des sources. Cette loi de répartition se modifie au cours du fluage. Tous calculs faits, on trouve pour ε une loi sensiblement parabolique, mais dont l'exposant décroît lentement au cours du temps et tend vers 0 (fluage logarithmique). Ce résultat

ne correspond pas aux lois expérimentales que nous avons trouvées.

Ainsi, il n'existe pas encore d'explication satisfaisante du fluage transitoire parabolique, reposant sur une théorie des dislocations où la consolidation est caractérisée par un paramètre moyen. Si même on pouvait trouver une expression satisfaisante d'un tel paramètre pour caractériser la disposition des dislocations après fluage dans un matériau et dans une gamme de températures (ou de charges) déterminées, il n'y aurait aucune raison pour que cette expression reste valable dans d'autres cas. Au contraire, notre modèle à interactions s'applique à des matériaux très variés; il met en évidence ce qu'ils ont de commun dans la forme des interactions entre déplacements élémentaires. C'est là un de ses principaux avantages.

Ce modèle a évidemment des limites. En particulier il s'applique mal au cas où la répartition des obstacles se modifie beaucoup au cours du fluage; mais peut-être ces cas sont-ils moins fréquents qu'on ne l'imagine.

En tous cas, il est toujours bon de compléter la description formelle à l'aide de ces modèles, par une analyse physique caractérisant les processus élémentaires. Pour ce faire, une des méthodes les plus commodes est la détermination des énergies d'activation du processus qui commande la vitesse de déformation.

Rappelons un cas où cette déformation permet de bien distinguer deux types de fluage : c'est celui des deux énergies d'activation (31 000 et 11 000 cal/mole) trouvées à propos de l'analyse des cycles couple-torsion sur l'aluminium raffiné (chapitre cinquième, II, A), que l'on peut rapprocher de celles trouvées dans le fluage sous charge constante (chapitre cinquième, I, A, 4°), ainsi que d'observations sur la recouvrance et la forme des cycles (sommets pointus ou arrondis). On arrive ainsi à distinguer deux types de fluage :

a) Un fluage obéissant à une énergie d'activation de 31 000 cal/mole environ, se produisant dans les structures recuites ou peu écrouies. La recouvrance correspondante, après fluage, est très faible; les sommets des cycles couple-torsion sont pointus, ce qui traduit une irréversibilité notable (« frottement solide » et ψ' faible) ou ce qui revient à peu près au même, une vitesse de fluage s'accroissant très rapidement avec la contrainte σ^* .

b) Un fluage obéissant à une énergie d'activation de 11 000 cal/mole, se produisant presque uniquement dans les structures fortement écrouies (fragmentation en sous-grains), mais cependant déjà sensible dans les métaux recuits écrouis par quelques cycles couple-torsion (début d'arrondissement des sommets à 200°). La recouvrance correspondante est forte (cf. tableau III, A II 22 et 22 bis); les sommets des cycles couple-torsion sont arrondis; en conséquence, ce fluage est moins irréversible que le précédent, car ψ' est plus fort (tableau XXII); ou bien, ce qui revient au même, la loi donnant sa vitesse de fluage en fonction de σ est plus linéaire; cette tendance correspond bien à celle de la forme des cycles, qui s'approche d'une ellipse.

Quelle interprétation donner à ces deux modes de fluage ? Le premier correspond sans doute à la mise en activité d'un nombre assez restreint de sources, envoyant chacune une ou plusieurs boucles de dislocations à des distances assez grandes; ces dislocations ont à franchir plusieurs obstacles (barrière) et à former des « jonctions » ou des « écheveaux »**, ce qui confère à leur déplacement un caractère fortement irréversible.

Le second fluage se produit dans un métal contenant déjà beaucoup de dislocations, arrangées en parois plus ou moins nettes. Les dislocations libres ne peuvent aller loin, mais les sources sont beaucoup plus nombreuses, car une partie des dislocations introduites par l'écrouissage peut sans doute jouer ce rôle. Au cours de leur déplacement, avant d'être arrêtées par les tensions internes des parois, ces dislocations sont freinées soit par des crans, soit par des « arbres » (autres dislocations) à couper. Ce freinage correspond à des processus activés dont l'énergie d'activation est plus faible que dans le premier cas. Le fait que les dislocations mises en mouvement sont nettement plus nombreuses que dans le cas précédent explique que, pour une même con-

* En effet, une loi en $v \simeq \sigma^s$, pour les grandes valeurs de s , donne une courbe présentant au départ une partie presque horizontale, suivie d'une accélération brusque, que l'on peut prendre pour une limite élastique.

** En réalité, quand une dislocation vient buter contre un écheveau, ce n'est sans doute pas la même qui en ressort pour aller plus loin, mais une autre, provenant d'une source située dans l'écheveau même et mise en mouvement par les processus de réarrangement déclenchés dans l'écheveau par l'arrivée de la première dislocation (voir par exemple ¹⁷).

trainte, ce type de fluage soit beaucoup plus facile que sur métal recuit, comme nous l'avions signalé au chapitre cinquième (II, A, 2°).

Il faut d'ailleurs bien distinguer le fluage du métal une fois écroui, qui correspond à un exposant m assez fort (cf. A II 22, tableau III) et la déformation même qui produit cet écrouissage important; en effet, d'après ce que nous avons vu pour l'aluminium (chapitre cinquième, I, A, 4° « Forme exacte du début des courbes de fluage » et l'acier sorbitique (chapitre cinquième I, H, 3°) et un peu pour le fer et le nickel (chapitre cinquième, I, E et G), cette dernière est du type « hyperbolique » et irréversible (sans recouvrance); quand cette déformation initiale rapide fragmente le métal, c'est le réarrangement des dislocations dans les parois par un processus activé (diffusion, déviation ou relaxation des plus fortes contraintes par création de petites boucles locales de dislocation) qui permet à la déformation de se poursuivre par fluage, lequel donne alors lieu à recouvrance. Des essais déjà publiés³¹ permettent de préciser que c'est la *rapidité* de la déformation qui accroît la tendance à l'irréversibilité.

Revenons sur le fluage logarithmique et les équations [113] à [116] qui y conduisent. Quelle est l'origine du coefficient A de la formule [113], qui indique la manière dont l'écrouissage élève l'énergie d'activation, c'est-à-dire rend le franchissement des obstacles plus difficile. En nous référant aux deux types de fluage ou de consolidation dont nous venons de parler, on peut distinguer deux cas :

a) L'écrouissage est irréversible et formé par des arrangements de dislocation bloquant celle-ci dans les deux sens, par exemple des jonctions. Dans ce cas, la difficulté croissante du franchissement des obstacles est liée à la réduction de longueur des boucles libres de dislocation; on a montré¹⁷ que cet effet était proportionnel à la déformation. Les équations [113] à [116] s'appliquent directement. C'est sans doute le cas qui correspond au fluage logarithmique à très basse température.

b) L'écrouissage est réversible, et produit principalement par des contraintes internes qui freinent les dislocations. Les dislocations mobiles prennent alors une forme d'équilibre sous l'action des deux actions opposées de la tension appliquée et des contraintes internes. Il y a bien toujours une probabilité de sauts

« en avant » (dans le sens de la contrainte appliquée), donnée par la formule [114]; mais il faut aussi tenir compte d'une certaine probabilité de sauts « en retour » ce qui revient à remplacer l'exponentielle par un sinus hyperbolique, comme dans la formule [63]. Il vient alors (en supposant ε_0 nul) :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = V_0 \operatorname{sh} [b (\sigma - k_2 \varepsilon)] \quad [120]$$

qui, intégrée, donne :

$$t \operatorname{th} \left[\frac{b}{2} (\sigma - k_2 \varepsilon) \right] = \operatorname{th} \left(\frac{b \sigma}{2} \right) e^{-b k_2 V_0 t} \quad [121]$$

Cette expression donnant ε en fonction de t est plus compliquée que la loi logarithmique [116]. Mais, $b \sigma$ étant d'un ordre de grandeur nettement supérieur à l'unité, le premier membre se réduit sensiblement à :

$$1 - 2 e^{-b (\sigma - k_2 \varepsilon)}$$

sauf pour les valeurs de ε approchant $\frac{\sigma}{k_2}$. De même, V_0 étant très petit (de l'ordre de la vitesse initiale de fluage multipliée par $e^{-b \sigma}$), le deuxième membre vaut sensiblement :

$$1 - b k_2 V_0 t$$

tant que t n'est pas très grand.

On voit donc que la fonction $\varepsilon(t)$ définie implicitement par l'équation [121] se réduit à une logarithmique, sauf pour les valeurs très grandes des temps, pour lesquelles elle tend exponentiellement vers une asymptote

$$\varepsilon_\infty = \frac{\sigma}{k_2}.$$

On remarquera que l'équation [121] est exactement celle à laquelle on aboutirait si l'on calculait le fluage d'un modèle de Boltzmann unique, mais dont la viscosité, non linéaire, suivrait une loi en sinus hyperbolique. L'équation [120] est en effet identique, dans ce cas, à l'équation [22] (chapitre quatrième); c'est pourquoi nous avons désigné par k_2 le taux de consolidation liant l'augmentation de résistance à la déformation.

Il est alors très important d'essayer de prévoir ce que donneraient plusieurs modèles de Boltzmann de ce genre (à viscosité en sh) disposés selon notre modèle à interactions. Nous n'avons malheureusement pas pu disposer de résistances électriques non linéaires dont les caractéristiques aient une forme en sinus hyperbolique, et qui nous auraient permis d'utiliser l'analogie électrique. Nous sommes donc réduits à raisonner par analogie : dans le cas où la caractéristique est une fonction puissance (fig. 68), nous avons vu qu'un *modèle de Boltzmann unique*, d'après le calcul, doit donner une *fonction fluage hyperbolique* ($m < 0$) ; le fait de mettre *plusieurs modèles* de ce genre en interaction relève m à une *valeur voisine de 0,25*. Si on remplace les modèles à caractéristiques en fonction puissance par des modèles à caractéristiques en sinus

hyperbolique, nous venons de voir qu'un modèle unique donne une loi logarithmique ($m = 0$) ; on peut donc penser que plusieurs modèles en interaction relèvent m à une valeur supérieure à 0,25, tout en restant inférieure à 0,5, valeur obtenue pour des résistances linéaires. Ce raisonnement est évidemment hypothétique, mais donnerait précisément des valeurs de 0,3-0,4 qu'on observe pour m dans les courbes de fluage quand la température n'est pas trop élevée (valeurs voisines de celles de la loi d'Andrade). Du point de vue structural, cette conclusion est assez vraisemblable ; les températures en question sont celles où les dislocations des « écheveaux » produits par l'écroutissage commencent à pouvoir se réarranger par diffusion ou par déviation, et à former des parois plus ou moins vagues.

CHAPITRE SEPTIEME

CONCLUSION GENERALE

Le fluage des matériaux est en général expliqué soit en termes de modèles rhéologiques (combinant des éléments « visqueux » et « élastiques »), soit par la théorie des dislocations, s'il s'agit de matériaux cristallisés. Nous avons essayé de faire une synthèse de ces deux genres de théories, en évitant d'expliquer par la seule théorie des dislocations des lois du fluage si elles se rencontrent également dans les matériaux amorphes.

Le fluage à vitesse constante, s'il pose des problèmes physiques relatifs à la *nature du processus activé élémentaire* qui commande cette vitesse, ne soulève pas de problèmes rhéologiques difficiles à résoudre en ce sens qu'il ne donne aucun renseignement sur les dispositions relatives des éléments « visqueux » et « élastiques » qui interviennent. C'est pourquoi nous nous sommes attachés à étudier plutôt le fluage transitoire, précédant l'établissement éventuel d'un régime stationnaire.

On admet généralement que la composante transitoire du fluage suit une loi parabolique :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a t^m$$

ou logarithmique :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a \log (1 + b t)$$

Pour vérifier ces lois et en apprécier la généralité, nous avons pratiqué de très nombreux essais de fluage sur une grande variété de matériaux, cristallins ou amorphes, métalliques ou non-métalliques. Les courbes de fluage ont été analysées par une méthode différentielle, seule capable de dire si la courbe sur une portion ou en totalité, suit une loi en t^m , et de déterminer avec certitude l'exposant m correspondant. Remarquons en passant qu'au regard d'une méthode différentielle, le fluage logarithmique apparaît comme un cas particulier de fluage parabolique, avec $m = 0$.

Les résultats de ces analyses ont été les suivants :

- pour la plupart des matériaux, le fluage transitoire est bien parabolique ; c'est le cas pour les verres, les matières plastiques comme le rhodoïd, les alliages contenant des précipités (aciers, aluminums commerciaux), les métaux hexagonaux où les joints constituent des

obstacles à la déformation (Zn, Mg), les métaux contenant dès le début de la déformation des sous-joints à peu près bien formés (Ni polygonisé, Al ou Cu fragmenté par la déformation instantanée à la mise en charge);

— pour des métaux ductiles comme Al raffiné sous faible charge, la courbe de fluage transitoire n'est pas parabolique et présente des anomalies au début;

— pour le nickel et le fer Armco vers 400°, certaines courbes de fluage ont au début une portion apparemment logarithmique, d'ailleurs pas très longue; une analyse plus poussée montre que cette portion est plutôt une transition entre un début hyperbolique (fluage très rapidement ralenti, avec asymptote) et une suite parabolique. Il faut d'ailleurs remarquer que, si l'on ne prend pas une méthode d'analyse différentielle, on peut très bien confondre une courbe logarithmique avec une parabole d'exposant faible, 0,1 par exemple;

— en utilisant un dispositif d'enregistrement très rapide, on observe que, tout au début, les courbes ne sont pas paraboliques : la vitesse initiale de fluage est finie (sauf quand la charge est très forte et qu'il existe au début un terme hyperbolique, de courte durée); puis pendant un temps de 10 à 30 secondes par exemple, le fluage suit une loi exponentielle, pour devenir ensuite parabolique.

Dans les cas où le fluage est bien parabolique, les valeurs observées de l'exposant m vont de 0,15 à 0,85; elles sont indiquées au tableau XXI. On note une tendance générale pour m à croître avec la température.

En ce qui concerne les explications théoriques, la théorie des dislocations explique bien le fluage logarithmique, pour les corps cristallisés. Mais nous avons montré qu'il n'existe pas d'explication satisfaisante du fluage parabolique.

Nous avons donc été conduit à proposer une explication dans laquelle les obstacles fixes qui produisent la consolidation dans le fluage logarithmique (à très basse température), deviennent capables de céder lentement si on élève un peu la température, les dislocations ainsi libérées venant s'empiler devant l'obstacle suivant, et ainsi de suite. Cette cascade d'obstacles conduit à un modèle rhéologique d'un nouveau genre, à interactions.

Nous avons développé l'étude de ces modèles à interactions, soit par le calcul, soit à l'aide

d'un modèle analogique électrique. Les composantes transitoires, ainsi tracées sont bien des fonctions paraboliques du temps avec des valeurs variées de l'exposant m :

— Lorsque les viscosités sont non-linéaires, m est de l'ordre de 0,2 à 0,3, probablement un peu plus si la viscosité est fonction en sinus hyperbolique de la contrainte. Pour les corps cristallisés, les obstacles sont sans doute des écheveaux ou des parois de dislocations;

— lorsque les viscosités sont linéaires, mais la première résistance plus faible que les suivantes, m va de 0,36 à 0,46, valeur observée pour beaucoup de métaux. Il se peut que, dans ce cas, certains obstacles soient intracristallins, d'autres constitués par les joints intergranulaires;

— lorsque les viscosités sont linéaires et toutes identiques, m est de l'ordre de 0,5. C'est ce qu'on observe pour le verre bien recuit, pour le rhodoïd et pour plusieurs métaux dans la zone des températures d'équicohésion;

— lorsque le nombre des résistances visqueuses est petit et la dernière résistance plus faible que les autres, m dépasse 0,5, ce qui pourrait bien décrire le comportement des métaux au-dessus des températures d'équicohésion.

D'autre part, certaines courbes de *relaxation* ont été étudiées, et une formule proposée pour les représenter. La *courbe de recouvrance* (raccourcissement spontané après décharge, à la fin d'un essai de fluage) est également intéressante à enregistrer; elle a généralement une allure parabolique en fonction du temps, au moins au début.

La tendance à la recouvrance est faible dans les métaux comme l'aluminium pur, mais plus forte dans les métaux hexagonaux (Zn, Mg) ou les aluminiums impurs; enfin, elle est très forte dans les aciers sorbitiques (nombreux précipités) le verre et le rhodoïd. Cette tendance à la recouvrance est intéressante à examiner, car elle peut donner des indications sur le mécanisme de la consolidation qui ralentit le fluage transitoire : si les obstacles créés bloquent les dislocations dans les deux sens, comme des jonctions ou combinaisons compliquées de dislocations, la tendance à la recouvrance sera très faible (écrouissage irréversible); cette tendance sera forte au contraire si les obstacles arrêtant les dislocations sont des champs de fortes contraintes internes, capables de les faire rebrousser chemin lors-

que la contrainte est supprimée ou diminuée (écrouissage réversible).

Pour mieux étudier cette tendance à la recouvrance, nous avons effectué, sur les mêmes matériaux, des essais de torsion cyclique à températures variées. L'élaboration des cycles permet de déterminer notamment le déphasage ψ entre l'angle de torsion α et le couple C , la forme des cycles donnant la vitesse de fluage V en fonction du couple C , le déphasage ψ' entre ces deux grandeurs, et la valeur maximale V_0 de la vitesse.

Pour comparer les variations de ces grandeurs avec celles que l'on peut déduire des modèles visco-élastiques simples, un calcul complet du mouvement des hystérésigraphes employés a été effectué en assimilant l'éprouvette à un « modèle de Boltzmann », en tenant compte, le cas échéant, de l'inertie des parties mobiles. Ces calculs ne peuvent expliquer le comportement observé, et notamment les faits suivants, qui sont les plus importants (voir tableau XXII).

— Le déphasage ψ' , et la forme des cycles (V , C) sont indépendants de la fréquence, et dans plusieurs cas, indépendants de l'amplitude. ψ' constitue donc un paramètre caractéristique du matériau à une température donnée

— La vitesse de fluage maximale, V_0 , varie comme ω^r (ω : pulsation).

— L'ouverture du cycle couple-torsion, mesurée par exemple par $\tan \psi$, varie comme ω^{r-1} ; cette loi, observée expérimentalement, est aussi une conséquence de l'invariance de ψ' et de la loi de variation de V_0 , en ω^r .

Ces observations s'expliquent par contre bien si l'on fait appel à un *modèle à interaction* analogue à celui que nous avons introduit pour expliquer le fluage transitoire. Nous en avons fait la vérification, soit, dans quelques cas, avec l'analogie électrique (la vérification dans certains cas n'est pas parfaite, par exemple pour l'invariance de ψ' , mais semble s'améliorer au fur et à mesure qu'augmente le nombre de « cellules » successives en interaction), soit par le calcul, en utilisant une transformation de Laplace qui représente la solution d'un grand nombre de modèles de Boltzmann en parallèle, tous différents, avec une certaine fonction de répartition, ce qui du *point de vue formel* revient au même, comme nous l'avons montré (mais pas du point de vue physique).

La forme des cycles couple-torsion est aussi intéressante à étudier. Ces cycles présentent des sommets pointus pour les matériaux où la tendance à la recouvrance (définie plus haut à propos des essais de fluage) est nulle ou très faible; ces sommets, par contre, sont arrondis si cette tendance est forte, et on observe souvent des cycles elliptiques (verre, acier sorbitique, métaux très écrouis). On peut dans certains cas déterminer l'énergie d'activation du processus qui régit la forme des cycles; il n'est pas le même pour le fluage irréversible (31 000 cal/mole pour Al) et pour le fluage réversible à l'état écroui (11 000 cal/mole pour Al).

Ces remarques établissent un parallélisme entre les résultats des essais de fluage et ceux des essais de torsion cyclique. Ce parallélisme est accentué par une corrélation, d'ailleurs pas très forte, que l'on observe entre l'exposant m du fluage transitoire, et l'exposant r de la loi des variations de V_0 avec ω :

$$r + 0,6 m \approx 1,1 (\pm 0,1)$$

Un calcul, basé sur la transformation de Laplace, mentionnée ci-dessus, montre qu'on devrait avoir dans le cas où les viscosités sont linéaires :

$$r + m = 1$$

L'accord entre relation empirique et théorique, sans être total, est assez satisfaisant si l'on tient compte de ce qu'en réalité les viscosités ne sont pas linéaires. Il indique que le comportement rhéologique des matériaux en régime transitoire (composante transitoire sous charge constante, ou cycles couple-torsion sous charge cyclique) peut se déduire à l'aide d'un nombre restreint de paramètres :

— l'exposant m , qui dépend de la disposition des obstacles et de la manière dont les glissements les passent, selon que la résistance de ces obstacles peut être assimilée à une résistance visqueuse linéaire, ou en sh ($b \sigma$) ou en σ^n ;

— la tendance à la recouvrance, qui dépend de la « réversibilité » de ces obstacles.

Il faut cependant bien prendre garde que l'exposant m n'est pas lié directement à des grandeurs physiques fondamentales, comme le seraient les coefficients de l'équation différentielle du mouvement. Une méthode pour calculer ces coefficients a d'ailleurs été indiquée ailleurs²². L'exposant m a plutôt le caractère d'un *paramètre morphologique*.

ANNEXE I

APPLICATION DU MODELE DE BOLTZMANN A L'HYSTERESIGRAPHE CHEVENARD

Supposons que l'éprouvette d'un hystérésigraphe obéisse aux lois rhéologiques du modèle de Boltzmann. Son mouvement sera solution de l'équation [24] qui, dans le cas des variables couple (C) et torsion (α) s'écrit :

$$C + \tau_a \frac{dC}{dt} = k_R \left(\alpha + \tau_c \frac{d\alpha}{dt} \right) \quad [A 1]$$

où τ_a est le « temps de relaxation » à déformation constante, τ_c le « temps de fluage » (parfois aussi appelé temps de relaxation) sous charge constante; et k_R le « module relaxé », lié aux coefficients élastiques des ressorts de la figure 6, k_1 et k_2 , par la relation :

$$k_R = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad [A 2]$$

Si μ est le coefficient de viscosité de l'amortisseur, les temps de relaxation sont donnés par :

$$\tau_c = \frac{\mu}{k_2} \quad [A 3]$$

$$\tau_a = \tau_c \frac{k_R}{k_1} = \frac{\mu}{k_1 + k_2}$$

d'où une autre expression de [A 1] :

$$(k_1 + k_2) C + \mu \frac{dC}{dt} = k_1 k_2 \alpha + \mu k_1 \frac{d\alpha}{dt} \quad ([A 1 \text{ bis}])$$

Dans l'hystérésigraphe Chevenard, et dans tout appareil similaire où l'on peut négliger les effets d'inertie et où la torsion est une fonction imposée du temps, sinusoïdale, on peut chercher à voir si l'équation [A 1] est satisfaite par des solutions du type :

$$\alpha + \alpha_0 \sin \omega t \quad [A 4]$$

$$C = C_0 \sin (\omega t + \psi)$$

on trouve, par identification, que des relations de ce type sont possibles, à condition que :

$$C_0 \cos \psi - \omega \tau_a C_0 \sin \psi = k_R \alpha_0 \quad [A 5]$$

$$C_0 \sin \psi + \omega \tau_a C_0 \cos \psi = k_R \alpha_0 \tau_c$$

D'où l'on tire les deux inconnues déterminant la loi de variation de C :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega (\tau_c - \tau_a)}{1 + \omega^2 \tau_a \tau_c} = \frac{\omega (k_1 - k_R) \tau_a}{k_R + \omega^2 k_1 \tau_a^2} \quad [A 6]$$

$$C_0 = k_R \alpha_0 \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau_c^2}{1 + \omega^2 \tau_a^2}} \quad [A 7]$$

$$= \alpha_0 \sqrt{\frac{k_R^2 + \omega^2 k_1 \tau_a^2}{1 + \omega^2 \tau_a^2}}$$

La hauteur du cycle à l'origine, OH (fig. 5) est donnée par :

$$C_0 \sin \psi = k_R \alpha_0 \frac{\omega (\tau_c - \tau_a)}{1 + \omega^2 \tau_a^2} \quad [A 8]$$

Cette grandeur est d'ailleurs proportionnelle à l'aire du cycle.

On remarquera que les deux formules décrivant les variations de $\operatorname{tg} \psi$ ou de la hauteur (ou l'aire) du cycle en fonction de ω sont du type :

$$f(\omega) \simeq \frac{a \omega}{a^2 + \omega^2} \quad [A 9]$$

Cette fonction est maximale pour $\omega = a$; sa valeur est alors $\frac{1}{2a}$. On remarque que la fonction prend des valeurs égales pour des valeurs

$$\omega = n a$$

et :

$$\omega = a/n.$$

En échelle logarithmique de ω , cette fonction est donc représentable par une courbe en cloche symétrique, qu'on appelle souvent *pic de relaxation* et dont la largeur (ou ouverture) est caractéristique des modèles de Boltzmann. Quelques valeurs numériques permettront de chiffrer cette largeur.

ω	$f(\omega) = \frac{a \omega}{a^2 + \omega^2}$
a	0,5
$2 a$ ou $a/2$	0,4
$3 a$ ou $a/3$	0,3
$10 a$ ou $a/10$	0,099
$n a$ ou a/n	# $1/n$

La valeur de $\omega \tau_a$ correspondant au pic vaut 1 pour la hauteur du pic de la fonction

$$C_0 \sin \psi \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{k_R}{k_1}}$$

pour celui du frottement interne.

La formule [10] permet de calculer la vitesse de fluage. Elle s'écrit :

$$V = \alpha_0 \omega \cos \omega t - \frac{1}{k_1} C_0 \omega \cos (\omega t + \psi) \quad [\text{A } 10]$$

elle est de la forme :

$$V = V_0 \sin (\omega t + \psi + \psi') \quad [\text{A } 11]$$

où ψ' est le déphasage entre la vitesse de fluage et le couple. Par identification, on trouve :

$$\text{tg } \psi' = \frac{1}{\omega \tau_c} \quad [\text{A } 12]$$

$$V_0 = \frac{\omega (\tau_c - \tau_a)}{\tau_c \sqrt{1 + \omega^2 \tau_a^2}} \alpha_0 \quad [\text{A } 13]$$

On remarque que les équations [20], [25] et [26] permettent d'écrire (avec les variables α et C au lieu de ε et σ) :

$$V = \frac{1}{k_1 \tau_a} (\dot{C} - k_R \alpha) \quad [\text{A } 14]$$

la vitesse de fluage s'annule en un point Q (fig. 5) tel que la pente de OQ soit égale au module relaxé k_R . A ce point la pente du cycle, $\frac{\delta c}{\delta a}$ vaut k_1 , module non relaxé. Si le cycle est elliptique, les diamètres de pentes respectives k_1 et k_R sont donc des diamètres conjugués.

Cas particulier

Liquide de Maxwell : $k_2 = k_R = 0$; $\tau_c = \infty$.

Pour les cycles elliptiques, il vaut mieux exprimer toutes les grandeurs en fonction du coefficient de viscosité $\mu (= k_1 \tau_a)$:

$$\text{tg } \psi = \frac{k_1}{\mu \omega} \quad [\text{A } 15]$$

$$C_0 = \alpha_0 \frac{\mu \omega k_1}{k_1^2 + \mu^2 \omega^2} \quad [\text{A } 16]$$

$$\psi' = 0 \quad [\text{A } 17]$$

La vitesse de fluage est en phase avec le couple, en sorte que le point Q (fig. 5) se trouve sur l'axe horizontal O x.

ANNEXE II

APPLICATION DU MODELE DE BOLTZMANN A L'HYSTERESIGRAPHE BOULANGER

1. — Cas des oscillations forcées

L'hystérésigraphe Boulanger utilise des oscillations forcées, où le couple est une fonction sinusoïdale du temps. Pour ne pas changer de notation, nous continuerons à écrire :

$$C = C_0 \sin (\omega t + \psi) \quad [\text{A } 18]$$

en choisissant une origine des temps telle que la torsion qui en résulte puisse s'écrire :

$$\alpha = \alpha_0 \sin \omega t \quad [\text{A } 19]$$

On a vérifié, en effet, lorsqu'on enregistre à chaud des cycles couple-torsion non réduits à une droite, que la forme de ces cycles est elliptique, c'est-à-dire qu'une variation sinusoïdale du couple entraîne une variation également sinusoïdale de l'angle de torsion.

Les fréquences des sollicitations utilisées vont de 1/30 à 2 Herz. Celles des vibrations libres, dont nous reparlerons plus loin, sont beaucoup plus élevées, pour les éprouvettes utilisées normalement (≥ 20 Herz).

Pour des cas compliqués, le recours au calcul symbolique (voir par exemple Man-

del⁵⁵) permet de simplifier l'exposé des calculs. Nous avons cependant préféré ici développer les calculs de façon à expliciter les coefficients des différents termes.

L'équation générale du mouvement de cet hystérésigraphe, compte tenu de l'inertie I des parties suspendues, a été établie dans le texte (équation [34]). Nous la reproduisons ici :

$$\begin{aligned} \tau_a I \frac{d^3 \alpha}{dt^3} + I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k_1 \tau_a \frac{d \alpha}{dt} + k_R \alpha \\ = C_0 [\sin(\omega t + \psi) + \omega \tau_a \cos(\omega t + \psi)] \end{aligned} \quad [A 20]$$

La solution générale est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre (termes exponentiels amortis dont nous reparlerons plus loin en II, et qui disparaissent rapidement dès que les cycles sont « accommodés ») et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. On peut trouver pour celle-ci une fonction sinusoïdale non amortie, à condition que ψ et α_0 satisfassent aux égalités ci-dessous :

$$\omega \frac{\alpha_0}{C_0} (k_1 - I \omega^2) \tau_a = \sin \psi + \omega \tau_a \cos \psi \quad [A 21]$$

$$\frac{\alpha_0}{C_0} (k_R - I \omega^2) = \cos \psi - \omega \tau_a \sin \psi$$

d'où l'on tire :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega (k_1 - k_R) \tau_a}{k_R + \omega^2 (k_1 \tau_a^2 - I) - \omega^4 I \tau_a^2} \quad [A 22]$$

et :

$$\frac{\alpha_0^2}{C_0^2} = \frac{1 + \omega^2 \tau_a^2}{(k_R - I \omega^2)^2 + \omega^2 \tau_a^2 (k_1 - I \omega^2)^2} \quad [A 23]$$

Ces deux égalités définissent, par α_0 et ψ , la forme du cycle, en fonction des paramètres ω et τ_a . Ce sont, en effet, les deux grandeurs que l'on peut faire varier expérimentalement, pour une éprouvette donnée, en modifiant soit la vitesse (ω), soit la température, dont dépend τ_a .

On peut faire tout de suite diverses remarques :

1° Les paramètres ω et τ_a cessent de jouer un rôle symétrique n'intervenant que par

leurs produits, comme ils le faisaient dans le cas de l'hystérésigraphe Chevenard (équation [A 6] et [A 7]).

2° On dit, en général, qu'il y a *résonance* si $\frac{\alpha_0}{C_0}$ devient infini pour une valeur de ω . On voit ici que ce cas ne peut se présenter que si $k_R = k_1$, c'est-à-dire qu'il n'y a ni relaxation, ni fluage (matériau purement élastique). L'équation [A 23] suggère aussi un autre cas : celui où τ_a serait nul; mais ceci exige que k_1 soit infini; on est alors dans le cas du *solide de Kelvin-Voigt*, qui correspond au cas classique des circuits oscillants. Dans ce cas

$$k_2 = k_R, \quad \tau_c = \frac{\mu}{k_R}$$

et on a :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\mu \omega}{k_R - \omega^2 I} \quad [A 24]$$

$$\frac{\alpha_0^2}{C_0^2} = \frac{1}{(k_R - I \omega^2)^2 + \mu^2}$$

pour $\omega = \sqrt{\frac{k_R}{I}}$, $\operatorname{tg} \psi$ est infini en même temps que α_0 est maximal, mais cependant pas infini : même dans ce cas, la résonance est un peu amortie.

Mais en fait, aucun matériau solide ne correspond au modèle de Kelvin-Voigt.

3° Il existe toujours une valeur de ω pour laquelle $\operatorname{tg} \psi$ devient infini. En effet, en écrivant que le dénominateur de $\operatorname{tg} \psi$ s'annule, on trouve la condition :

$$(k_R - I \omega^2) = - (k_1 - I \omega^2) \omega^2 \tau_a^2 \quad [A 25]$$

qui peut s'écrire :

$$\omega^2 \tau_a^2 = - \frac{k_R - I \omega^2}{k_1 - I \omega^2} \quad [A 26]$$

En représentant graphiquement les variations, en fonction de ω^2 , des deux membres de [A 26], on voit qu'il y a toujours une racine positive pour ω^2 , comprise entre $\frac{k_R}{I}$ et $\frac{k_1}{I}$.

On peut se demander si la résonance (amortie) se produit pour la même fréquence, c'est-à-dire si α_0 passe par un maximum pour la même valeur de ω . Il suffit de prendre la dérivée de l'expression [A 23] par rapport à ω :

c'est une fraction dont le numérateur s'écrit :

$$2 \omega [(k_R - I \omega^2) (I + k_R \tau_a^2) + \tau_a^2 (k_1 - I \omega^2) (2 I \omega^2 - k_1 + I \omega^4 \tau_a^2)] \quad [A 27]$$

La valeur de ω rendant $\operatorname{tg} \psi$ infini, satisfait à [A 25], ce qui permet de réduire [A 27] à l'expression plus simple.

$$2 \omega \tau_a^2 (k_R - k_1) (k_1 + k_R - 2 I \omega^2) \quad [A 28]$$

qui ne s'annule que dans le cas très particulier où l'on a simultanément :

$$\omega = \frac{1}{\tau_a} = \frac{k_R + k_1}{2}$$

Dans le cas général, on voit donc qu'à la résonance $\operatorname{tg} \psi$ n'est pas infini.

On peut aussi étudier les variations de $\frac{\alpha_o}{C_o^2}$ en fonction de τ_a . La dérivée de [A 23] a pour numérateur :

$$2 \omega^2 \tau_a (k_R - k_1) (k_1 + k_R - 2 I \omega^2) \quad [A 29]$$

expression qui ressemble beaucoup à [A 28].

On voit que $\frac{\alpha_o}{C_o}$ passe de

$$\frac{1}{|k_R - I \omega^2|} \quad \text{à} \quad \frac{1}{|k_1 - I \omega^2|}$$

quand τ_a passe de 0 à $+\infty$.

Cette variation est croissante si $2 I \omega^2 > k_1 + k_R$, décroissante en cas contraire. Pour

$$2 I \omega^2 = k_1 + k_R, \quad \frac{\alpha_o}{C_o} = \frac{2}{k_R + k_1}$$

valeur indépendante de τ_a .

Nous allons maintenant examiner plus en détail les variations du frottement interne, c'est-à-dire de $\operatorname{tg} \psi$.

A) Cas particulier : liquide de Maxwell

$$k_R = k_2 = 0, \quad \tau_c = \infty \quad \tau_a = \frac{\mu}{k_1}$$

On trouve :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\mu}{\omega (k_1 \tau_a^2 - I - I \omega^2 \tau_a^2)} \quad [A 30]$$

1° Pour les variations de $\operatorname{tg} \psi$ en fonction de ω , deux cas sont alors à considérer :

a) $\tau_a^2 \leq \frac{I}{k_1}$, ce qui signifie que τ_a est inférieur à la période propre qu'aurait le pendule en l'absence de relaxation. Dans ce cas

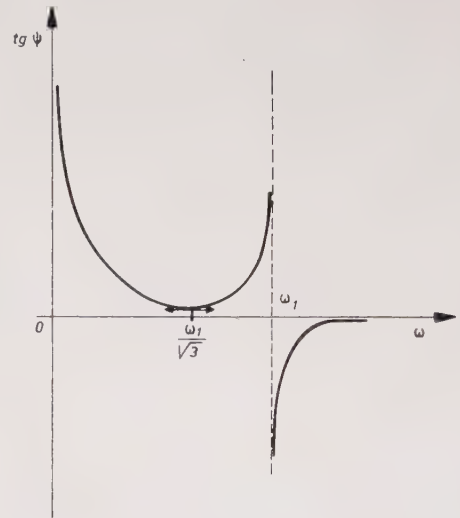


FIG. 71

Variation de $\operatorname{tg} \psi$ avec ω - liquide de Maxwell,

$$\tau_a^2 > \frac{I}{k_1}$$

$\operatorname{tg} \psi$ varie de façon pseudohyperbolique, de $-\infty$ à 0 quand ω passe de 0 à $+\infty$.

b) $\tau_a^2 > \frac{I}{k_1}$. ω devient infini pour une valeur :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 \tau_a^2 - I}{I \tau_a^2}}$$

et passe par un minimum pour $\frac{\omega_1}{\sqrt{3}}$. Ses variations sont représentées sur la figure 71.

2° Si l'on veut étudier de $\operatorname{tg} \psi$ en fonction de τ_a , on peut récrire :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\mu}{I \omega} \cdot \frac{1}{\tau_a^2 \left(\frac{k_1}{I} - \omega^2 \right) - 1}$$

On peut écarter le cas où $\omega^2 > \frac{k_1}{I}$, jamais réalisé en pratique dans l'hystérésigraphe

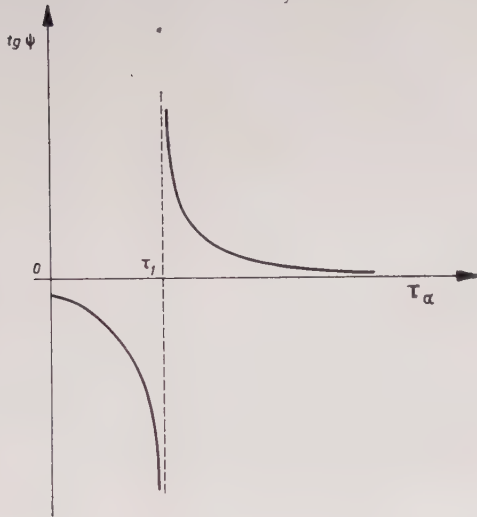


FIG. 72

Variation de $\operatorname{tg} \psi$ avec τ_a - liquide de Maxwell,

$$\omega^2 < \frac{k_1}{I}$$

Boullanger. Pour $\omega^2 < k_1/I$, les variations de $\operatorname{tg} \psi$ ont l'allure représentée sur la figure 72. L'asymptote verticale a lieu pour :

$$\tau_a = \tau_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{k_1}{I} - \omega^2}}$$

B) Cas général

Comme nous l'avons dit, les rôles de τ_a et de ω ne sont plus symétriques; il faut étudier leur influence séparément. Commençons par celle de τ_a , lui-même fonction de la température.

1° Variations des $\operatorname{tg} \psi$ avec τ_a , à ω constant.

Récrivons $\operatorname{tg} \psi$ sous la forme :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega (k_1 - k_R) \tau_a}{(k_R - I \omega^2) + \omega^2 \tau_a^2 (k_1 - I \omega^2)} \quad [A 31]$$

a) PREMIER CAS : ω^2 est à l'extérieur de l'intervalle $\left(\frac{k_R}{I} - \frac{k_1}{I} \right)$.

En pratique, les oscillations forcées utilisées étant toujours beaucoup plus lentes que les oscillations libres non relayées, il suffit de considérer le cas $\omega^2 < \frac{k_R}{I}$. Dans ce cas on obtient un *pic de relaxation* analogue au pic de l'hystérésigraphe Chevenard (annexe I), pour une valeur de τ_a égale à :

$$\tau_M = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{k_R - I \omega^2}{k_1 - I \omega^2}} \quad [A 32]$$

Cette valeur est un peu plus faible que celle correspondant au pic d'un hystérésigraphe Chevenard essayant la même éprouvette, qui vaudrait :

$$\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{k_R}{k_1}}$$

La hauteur de ce pic vaut :

$\operatorname{tg} \psi$ max

$$= \frac{k_1 - k_R}{2} \frac{1}{\sqrt{(k_R - I \omega^2) (k_1 - I \omega^2)}} \quad [A 33]$$

b) DEUXIEME CAS : $\frac{k_R}{I} < \omega^2 < \frac{k_1}{I}$

Il n'y a plus de pic, mais $\operatorname{tg} \psi$ devient infinie pour une valeur de τ_a :

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{I \omega^2 - k_R}{k_1 - I \omega^2}} \quad [A 32 \text{ bis}]$$

Les variations de $\operatorname{tg} \psi$ ont sensiblement l'allure de la figure 72, mais la courbe passe par l'origine. C'est le cas correspondant aux solutions de l'équation [A 26], dont nous avons parlé plus haut à propos de la résonance.

2° Variations de $\text{tg } \psi$ en fonction de ω , à τ_a constant.

Pour simplifier l'écriture, remplaçons les paramètres ω et τ_a par des paramètres sans dimension :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \tau_a^2 \frac{k_1}{I} = \left(\frac{\tau_a}{\tau_N} \right)^2 \\ \xi = \omega^2 \frac{I}{k_1} \end{array} \right. \quad (\tau_N : \text{période des oscillations libres non relaxées}). \quad [\text{A } 34]$$

et posons :

$$\beta = \frac{k_R}{k_1} (\leq 1) \quad [\text{A } 35]$$

Dans l'expression de $\text{tg } \psi$ [A 22], le dénominateur s'annule pour une valeur ω_1 de ω correspondant à la racine positive :

$$\xi_1 = \frac{\lambda - 1 + \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4\chi\lambda}}{2\lambda} \quad [\text{A } 36]$$

Les variations de ξ_1 sont reportées sur la figure 77; ξ_1 croît constamment de χ à 1 quand λ (et τ_a) varient de 0 à $+\infty$:

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \lambda = 0 & \xi_1 = \chi \\ \lambda \text{ petit} & \xi_1 \approx \chi [1 + (1 - \chi)\lambda] \\ \lambda = 1 & \xi_1 = \sqrt{\chi} \\ \lambda = \infty & \xi_1 = 1 \end{array}$$

Pour voir le sens de $\text{tg } \psi$, calculons la dérivée, à une constante ($k_1 - k_R$) τ_a près :

$$\begin{aligned} \frac{d(\text{tg } \psi)}{d\omega} &\simeq \frac{k_R + (I - k_1 \tau_a^2) \omega^2 + 3 I \tau_a^2 \omega^4}{[k_R + (k_1 \tau_a^2 - I) \omega^2 - I \tau_a^2 \omega^4]^2} \\ &= \frac{\chi - (\lambda - 1) \xi + 3 \lambda \xi^2}{k_1 [\chi + (\lambda - 1) \xi - \lambda \xi^2]^2} \end{aligned} \quad [\text{A } 37]$$

Elle s'annule pour des valeurs ω_M de ω correspondant à :

$$\xi_M = \frac{(\lambda - 1) \pm \sqrt{(\lambda - 1)^2 - 12\chi\lambda}}{6\lambda} \quad [\text{A } 38]$$

Trois cas sont à distinguer :

a) L'une ou l'autre des deux conditions suivantes est remplie :

$$(\lambda - 1)^2 < 12\chi\lambda \quad \text{ou} \quad \lambda < 1 :$$

les racines ω_M sont imaginaires; $\text{tg } \psi$ est constamment croissante, de part et d'autre de l'asymptote pour $\omega = \omega_1$, comme le montre la

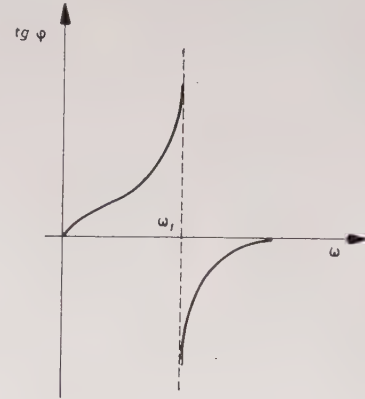


FIG. 73

Variation de $\text{tg } \psi$ avec ω - modèle de Boltzmann
($\lambda - 1)^2 < 12\chi\lambda$.

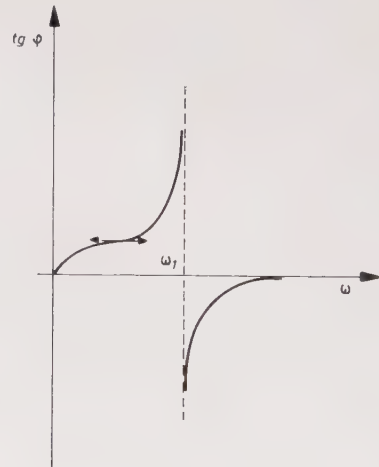


FIG. 74

Comme figure 73, ($\lambda - 1)^2 = 12\chi\lambda$.

figure 73. Pour $\lambda < 1$ la racine ξ_M est réelle mais négative, et l'inflexion sur la branche de gauche tend à disparaître :

b) ($\lambda - 1)^2 = 12\chi\lambda$. La branche de gauche présente une inflexion à tangente horizontale (fig. 74).

c) $(\lambda - 1)^2 > 12 \chi \lambda$. Un maximum apparaît sur la branche de gauche, analogue à un pic de relaxation (fig. 75).

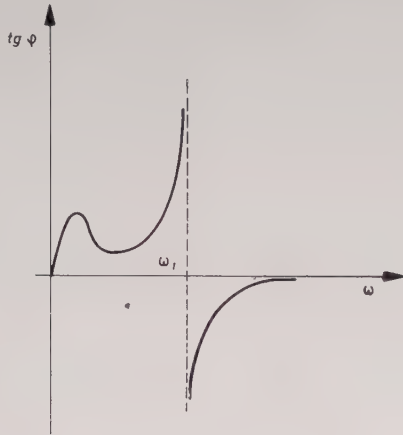


FIG. 75

Comme figure 73 $(\lambda - 1)^2 > 12 \chi \lambda$.

Dans le plan des variables (χ, λ) la courbe séparant les zones à pic de relaxation des zones sans pic a donc pour équation $(\lambda - 1)^2 = 12 \chi \lambda$, dans la zone $\lambda > 1$. Pour $\lambda < 1$, il n'y a pas non plus de pic. L'ensemble des zones correspondantes est représenté sur la figure 76.

3° Représentation simultanée des variations de $\text{tg } \psi$ en fonction de τ_a et ω .

Nous allons représenter dans le plan (τ_a, ω) , ou plutôt dans le plan (λ, ξ) les points correspondant à des valeurs particulières de $\text{tg } \psi$, à savoir :

- les valeurs pour lesquelles $\text{tg } \psi$ est infini;
- les valeurs pour lesquelles $\text{tg } \psi$ passe par un extremum, soit à ξ (ou ω) constant (paragraphe 1°), soit à τ_a (ou λ) constant (paragraphe 2°).

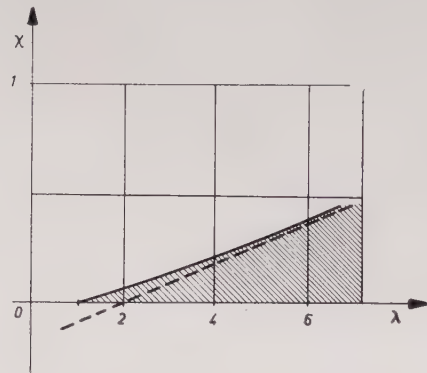


FIG. 76

Représentation de la courbe $(\lambda - 1)^2 = 12 \chi \lambda$. Il y a pic de relaxation pour les points représentatifs situés dans la zone hachurée.

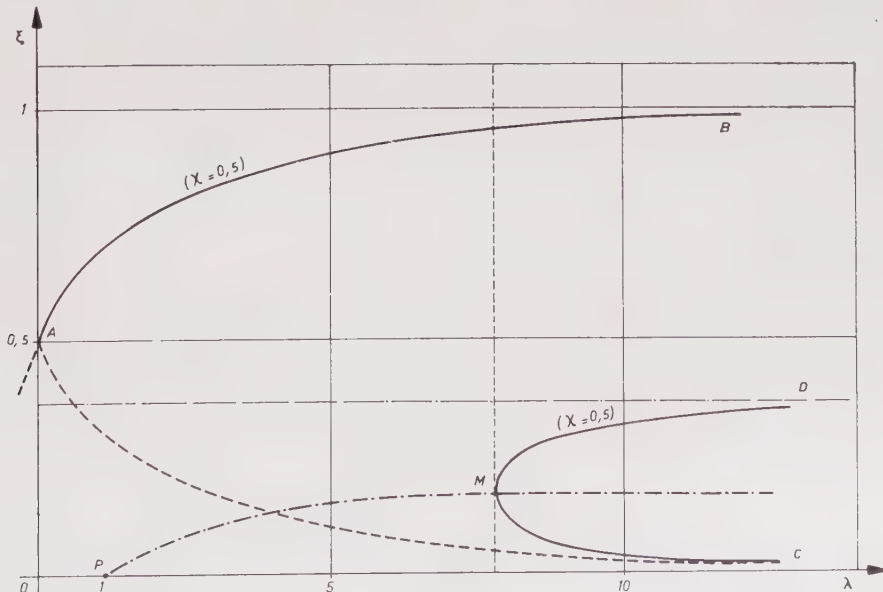


FIG. 77

Représentation d'ensemble des résultats dans le plan ξ, λ (ou τ_a, ω). AB - lieu des points où $\text{tg } \psi$ est infini. AC - lieu des points où $\text{tg } \psi$ passe par un maximum à ξ (ou ω) constant. CM et MD - lieux des points où $\text{tg } \psi$ passe respectivement par un maximum ou un minimum à λ (ou τ_a) constant.

La figure 77 représente, pour le cas d'un phénomène de relaxation assez important ($\chi = 0,5$), les courbes suivantes :

AB : lieu des points pour lesquels $\text{tg } \psi$ est infinie; on peut tirer son équation de [A 32 bis] ou de [A 36] qui sont équivalentes :

$$\lambda = \frac{\chi - \xi}{\xi(\xi - 1)} \quad [\text{A } 39]$$

AC : lieu des points où $\text{tg } \psi$ est maximal à ξ (ou ω) constant (paragraphe 1°), d'équation (cf. [A 32]) :

$$\lambda = \frac{\chi - \xi}{\xi(1 - \xi)} \quad [\text{A } 40]$$

Dans le cas que nous avons choisi, $\chi = 0,5$, les courbes AB et AC sont symétriques par rapport à la droite $\xi = 0,5$. Dans le cas général, AC est simplement symétrique (par rapport à O ξ) du prolongement de la courbe BA vers les λ négatifs.

CM : lieu des points où $\text{tg } \psi$ est maximal, à λ constant.

MD : lieu des points où $\text{tg } \psi$ est minimal, à λ constant; la branche asymptotique tend vers $\xi = 1/3$.

L'ensemble des courbes CM et MD constituent une branche d'une cubique d'équation (d'après [A 37]) :

$$3 \lambda \xi^2 - (\lambda - 1) \xi + \chi = 0 \quad [\text{A } 41]$$

Le lieu des sommets M, quand χ varie, a pour équation :

$$\xi = \frac{\lambda - 1}{6 \lambda} \quad [\text{A } 42]$$

La branche utile de cette courbe est représentée sur la figure 77 par la courbe P (M) Q. Elle correspond à la courbe de la figure 76.

Cette figure met bien en évidence la différence entre les hystérésigraphes du type Boulianger (avec volant) et du type Chevenard (sans inertie). *Dans le premier, l'introduction du volant fait que les courbes correspondant aux « pics de relaxation » à température variable et période constante (AC) et à période variable et température constante (MC) ne*

coïncident plus. Les deux courbes viennent cependant à se confondre pratiquement pour les grandes valeurs de λ : en effet, en développant en fonction de $1/\lambda$ les équations de ces deux courbes, soit :

$$\xi = \frac{\chi}{\lambda} \left(1 + \frac{1 + 6\chi}{\lambda} + \dots \right) \text{ pour MC} \quad [\text{A } 43]$$

et :

$$\xi = \frac{\chi}{\lambda} \left(1 - \frac{1 - \chi}{\lambda} + \dots \right) \text{ pour AC} \quad [\text{A } 44]$$

on constate qu'au second ordre près, il y a équivalence.

La courbe MD correspond à une « vallée » de la surface représentant $\text{tg } \psi$ en fonction de ξ et λ .

Au cas du liquide de Maxwell correspond une dégénérescence de la figure 77, représentée figure 78 : quand $\chi \rightarrow 0$, le point A se rapproche

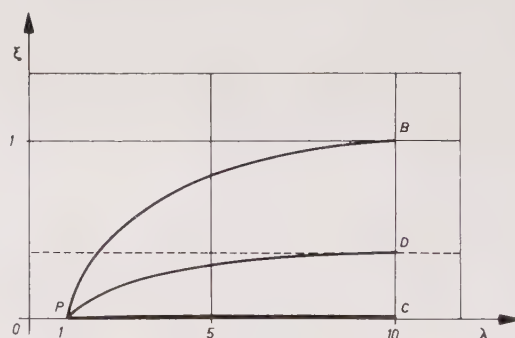


FIG. 78

Dégénérescence de la figure 77 pour un liquide de Maxwell OPB et CPD correspondent respectivement à AB et CMD de la figure 77.

de l'origine et la tangente en A tend à devenir horizontale; à la limite, la courbe AB tend vers la courbe OPB (fig. 78). La courbe AC vient se confondre avec l'axe O λ , le « pic » correspondant devenant infini. Enfin pour la courbe CMD, le point M se rapproche de P, la branche MC se confond avec PC (« pics » infinis) cependant que, pour les minimums, MD tend vers PD, homologue de PB dans le rapport 1/3.

II. — CAS DES OSCILLATIONS LIBRES

Ce cas est plus difficile à traiter en toute rigueur, car il dépend de la solution de l'équation différentielle :

$$\tau_a I \frac{d^3 \alpha}{dt^3} + \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k_1 \tau_a \frac{d \alpha}{dt} + k_R \alpha = 0 \quad [A 45]$$

qui est du troisième degré. L'équation caractéristique :

$$\tau_a I x^3 + I x^2 + k_1 \tau_a x + k_R \alpha = 0 \quad [A 46]$$

se ramène à la forme canonique :

$$y^3 + p y + q = 0 \quad [A 47]$$

en posant :

$$y = x - \frac{1}{3 \tau_a} \quad [A 48]$$

$$p = \frac{3 k_1 \tau_a^2 - I}{3 I \tau_a^2} = \frac{3 \lambda - 1}{3 \tau_a^2} \quad (\text{avec les notations [A 34]})$$

$$q = \frac{9 \tau_a^2 (3 k_R - k_1) + 2 I}{27 I \tau_a^3} = \frac{9 (3 \lambda - 1) \lambda + 2}{27 \tau_a^3}$$

Toutes réductions faites, on trouve :

$$4 p_3 + 27 q^2 = \frac{\lambda}{\tau_a^6} [4 \lambda^2 + \lambda (9 \lambda^2 - 18 \lambda - 1) + 4 \lambda] \quad [A 49]$$

Selon que cette quantité est négative ou positive, on a trois racines réelles (amortissement hypercritique) ou deux racines imaginaires et une réelle. Dans ce cas, qui est celui des oscillations amorties que l'on rencontre en pratique, sauf aux très hautes températures (ou parfois près des points de transformation allotropiques) on peut écrire les trois racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= -c \\ x_2 &= -a + b i \\ x_3 &= -a - b i \end{aligned} \quad [A 50]$$

donc la solution est de la forme :

$$\alpha = e^{-at} (A \cos b t + B \sin b t) + C e^{-ct} \quad [A 51]$$

Le cas général étant très difficile à résoudre, nous ne considérerons que trois domaines particuliers, quand on tend vers l'un des trois cas limites suivants :

a) Solide de Kelvin-Voigt

Bien que ce cas ne se rencontre pas dans les solides visco-élastiques, nous le traiterons ici car il correspond à l'équation classique des mouvements amortis (d'un circuit électrique par exemple), où la force élastique et la résistance visqueuse s'ajoutent simplement. Dans le modèle de Boltzmann, il correspond au cas où le ressort supérieur (fig. 6 du texte) est pratiquement indéformable (k_1 très grand). Des paramètres utilisés dans notre discussion, τ_a , et τ_a seul, est très petit.

En tenant compte des relations tirées de l'équation [A 46] :

$$\begin{aligned} 2 a + c &= \frac{1}{\tau_a} \\ 2 a c + a^2 + b^2 &= \frac{k_R}{I} \frac{\tau_c}{\tau_a} \\ c (a^2 + b^2) &= \frac{k_R}{\tau_a I} \end{aligned} \quad [A 52]$$

et en négligeant les termes en τ_a^2 , on calcule directement :

$$\begin{aligned} a &= \frac{k_R}{2 I} (\tau_c - \tau_a) + \frac{k_R^2}{2 I^2} \tau_a \tau_c^2 \\ b^2 &= \frac{k_R}{I} - \frac{k_R^2 \tau_c^2}{4 I^2} + \frac{k_R^2}{I^2} \tau_c \tau_a \\ c &= \frac{1}{\tau_a} + \dots \end{aligned} \quad [A 53]$$

Dans la solution générale [A 51], le troisième en e^{-ct} correspond à un terme d'accommodation qui disparaît très vite, parce que c est très grand. Quand $\tau_a \rightarrow 0$, on retrouve les formules connues des oscillations amorties d'un circuit, par exemple : on sait que dans ce cas la fréquence de résonance ($\omega^2 = k_R/I$) est différente de la fréquence des oscillations libres, comme on le constate sur les équations [A 53].

b) Liquide de Maxwell

Ce cas, que l'on rencontre dans les métaux pouvant fluier indéfiniment à très haute température, correspond à

$$k_R = k_2 \rightarrow 0$$

$$\tau_c \rightarrow \infty \quad \tau_a = \frac{\mu}{k_1}$$

en opérant comme dans le cas précédent, on trouve au second ordre près en k_2 :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2\tau_a} \left(1 - \frac{k_R}{k_1} - \frac{1}{4} \frac{k_R^2}{k_1^3 \tau_a^2} \dots \right) \\ b^2 &= \frac{k_1}{I} - \frac{1}{4\tau_a^2} - \frac{k_R}{2k_1 \tau_a^2} + \dots \\ c &= \frac{k_R}{k_1 \tau_a} \end{aligned} \quad [\text{A 54}]$$

Dans ce cas, $c \ll a$; le troisième terme de l'équation [A 51] représente donc une lente dérive des points moyens des oscillations amorties correspond aux deux premiers termes. D'après sa valeur en [A 54], on remarque que b n'est réel (au premier ordre près) que si $\frac{k_1 \tau_a^2}{I} > \frac{1}{4}$. C'est aussi la condition que donne l'expression [A 49] quand $\chi = 0$. Pour $\frac{k_1 \tau_a^2}{I} \leq \frac{1}{4}$, on obtient un amortissement critique ou hypercritique.

On remarque ici encore que la fréquence pour laquelle $\text{tg } \psi$ est infinie (résonance amortie), donnée par $\omega^2 = \frac{k_1}{I} - \frac{1}{\tau_a^2}$, est différente de celle des oscillations libres, données par b^2 des expressions [A 54].

c) Relaxation faible

k_R voisin de k_1 . En posant $k_1 - k_R = \varepsilon$ et en négligeant les termes en ε^2 , on trouve :

$$\begin{aligned} a &= \frac{(k_1 - k_R) \tau_a}{2(I + k_1 \tau_a^2)} \\ b^2 &= \frac{k_1}{I} - \frac{k_1 - k_R}{I + k_1 \tau_a^2} \\ c &= \frac{I}{\tau_a} \end{aligned} \quad [\text{A 55}]$$

a étant très petit, le terme en e^{-ct} s'amortit plus vite et apparaît donc comme un simple terme d'accommodation.

Dans ce cas, en développant la formule [A 36] selon les puissances de ε , on trouve que, *au premier ordre et même au deuxième ordre près, la fréquence propre [A 55] des oscillations libres est égale à celle rendant $\text{tg } \psi$ infini; l'amortissement des oscillations libres, toujours au second ordre près, est égal à celui d'oscillations forcées de même période, calculée sans tenir compte de l'inertie de la masse oscillante.*

ANNEXE III

CAS D'UN DEPHASAGE CONSTANT ENTRE VITESSE DE FLUAGE ET COUPLE

Dans un certain nombre des matériaux étudiés, l'expérience montre que, dans une large gamme de fréquence, le déphasage ψ' entre le couple C et la vitesse de fluage V (ou la vitesse de relaxation $\frac{\partial C}{\partial t}$) reste constant.

C'est aussi ce que l'on retrouve dans le cas de notre modèle à interaction.

Il peut donc être intéressant d'étudier le comportement d'un matériau visco-élastique

dans lequel on suppose, *a priori*, ψ' constant. S'il s'agit de cycles elliptiques, on pourra donc écrire, en prenant pour origine des temps l'instant où C s'annule, ce qui est toujours permis :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 \sin(\omega t - \psi) \\ V = V_0 \sin(\omega t + \psi') \\ C = C_0 \sin \omega t \end{cases} \quad [\text{A 56}]$$

Une solution de ce type est possible si la fonction satisfait à l'équation fondamentale [9] ou [9 bis], c'est-à-dire que l'on ait identiquement :

$$\frac{C_0 \omega}{k_1} \cos \omega t \equiv \alpha_0 \omega \cos (\omega t - \psi) - V_0 \sin (\omega t + \psi') \quad [A 57]$$

ce qui conduit au système d'équation :

$$\begin{cases} \frac{C_0 \omega}{k_1} = \alpha_0 \omega \cos \psi - V_0 \sin \psi' \\ 0 = \alpha_0 \omega \sin \psi - V_0 \cos \psi' \end{cases} \quad [A 58]$$

PREMIER CAS

Hystérésigraphe du type Boulanger. La variable imposée est le couple C; C_0 est donc donné et fixe.

La forme du cycle couple-torsion, elliptique, est alors déterminée par ψ et α_0 . On trouve :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{V_0 \cos \psi'}{V_0 \sin \psi' + \frac{C_0 \omega}{k_1}} \quad [A 59]$$

et l'ouverture du cycle est déterminée par la corde parallèle à l'axe des α :

$$\alpha_0 \sin \psi = \frac{V_0}{\omega} \cos \psi' \quad [A 60]$$

Les variations de ces deux quantités en fonction de ω dépendent de la variation du rapport $\rho = \frac{V_0}{\omega}$. En nous inspirant de ce que nous avons trouvé dans le cas du modèle à interaction (vérifié expérimentalement dans presque tous les cas), on peut supposer V_0 fonction parabolique de ω :

$$V_0 = C^{te} \cdot \omega^{1-m} \quad [A 61]$$

(m exposant du fluage transitoire)

ce qui donne la variation de ρ :

$$\rho = C^{te} \cdot \omega^{-m} \quad [A 62]$$

Le tableau ci-dessous résume les variations des quantités étudiées lorsque ω décroît :

ω	∞	$\searrow$	0
$\operatorname{tg} \psi$	0	$\nearrow$	$\operatorname{cotg} \psi'$
$\alpha_0 \sin \psi$	0	$\nearrow$	∞

Le fait que $\alpha_0 \sin \psi$ tende vers l'infini n'a évidemment pas de sens physique. C'est une pure conséquence mathématique des hypothèses où nous nous sommes placés; mais l'étude de notre modèle à interaction montre que, d'une part, la constance de ψ' n'est possible que dans un certain intervalle de variation de ω , d'autre part, quand ω tend vers 0, la loi de variation [A 61] n'est plus valable.

On pourra donc rencontrer en réalité des cas où ψ' varie en fonction de ω pour les valeurs très grande ou très petite de cette variable, comme le représente la figure 79; ψ' tend vers 0 pour $\omega = 0$ et $\omega = \infty$, tout en restant constant dans un grand intervalle. Dans ce cas, l'allure de la courbe donnant $\operatorname{tg} \psi$ en fonction de ω est un peu modifié près de l'origine, comme le montre la figure 79; quand ω tend vers 0, $\operatorname{tg} \psi$ tend vers l'infini au lieu de tendre vers une limite égale à $\operatorname{cotg} \psi'$.

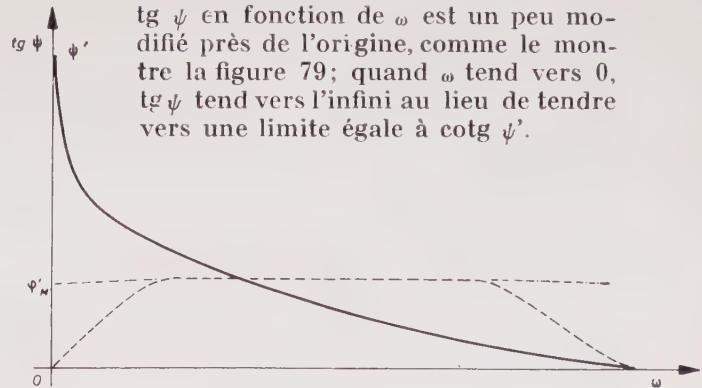


FIG. 79

Cas où ψ' est indépendant de ω dans un large intervalle (courbe pointillée); variations de $\operatorname{tg} \psi$ en fonction de ω .

DEUXIEME CAS.

Hystérésigraphe de type Chevenard. La variable imposée est l'angle de torsion α ; α_0 est donc donné et fixe.

Dans ces conditions, la forme du cycle elliptique est déterminée par :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\rho \cos \psi'}{\sqrt{\alpha_0^2 - \rho^2 \cos^2 \psi'}} \quad [\text{A } 63]$$

$$C_0 \sin \psi = k_1 \frac{\rho}{\alpha_0} \cos \psi'$$

$$(\sqrt{\alpha_0^2 - \rho^2 \cos^2 \psi'} - \rho \sin \psi') \quad [\text{A } 64]$$

Ces expressions n'ont de sens que si $\rho \leq \alpha_0$; il est d'ailleurs physiquement évident que la vitesse de fluage, V_0 , ne peut dépasser la valeur maximale de la vitesse imposée, $\alpha_0 \omega$.

Dans ces limites, les quantités étudiées varient de la façon suivante :

ω	∞	$\rightarrow$	LIMITE de validité des hypo- thèses
$\frac{\rho}{\alpha_0}$	0	$\nearrow$	1
$\operatorname{tg} \psi$	0	$\nearrow$	$\cotg \psi'$
$C_0 \sin \psi$	0	$\nearrow \text{ max } \searrow$	0

Le maximum de la fonction $C_0 \sin \psi$ est assez aplati.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. WOOD et D. CLARK. — *Trans. ASM* (1952), 44, 726.
2. F. R. N. NABARRO. — Conf. on Strength of Solids. Bristol, 1947. *Publ. Phys. Soc.* (1948), 75.
- C. HERRING. — *J. Applied Physics* (1950), 21, 437.
3. J. FRIEDEL. — Les dislocations. Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1956.
4. R. PEIERLS. — *Proc. Phys. Soc.* (1940), 52, 256.
- F. R. N. NABARRO. — *Proc. Phys. Soc.* (1957), 59, 256.
5. A. H. COTTRELL. — Rep. Conf. Strength Solids. Bristol, 1947. *Publ. Phys. Soc.* (1948), p. 30.
6. H. SUZUKI. — *Sc. Rep. Res. Inst. Tohoku Univ. A 4* (1952), 455.
7. C. M. ZENER. — Elasticité et Anélasticité des Métaux. Dunod, Paris, 1955.
8. A. N. C. da ANDRADE. — *Proc. Roy. Soc.* (1910), A 84, 1 et (1914), A 90, 329.
9. C. CRUSSARD. — *Rev. Métallurgie* (1946), 43, 307.
10. W. A. WOOD et H. J. TAPSELL. — *Nature* (1946), 158, 415.
11. C. CRUSSARD. — Discussion d'une communication de G. R. Wilms et W. A. Wood au Congrès de l'Inst. of Metals, 1949. Publié dans *Metal Industry*, oct. 1946, p. 326.
12. C. CRUSSARD. — *Metall.* (1960), 14, 12.
13. C. CRUSSARD et G. WYON. — *Rev. Métallurgie* (1951), 48, 121.
14. G. R. WILMS et W. A. WOOD. — *J. Inst. Metals* (1948-49), 75, 693.
15. O. D. SHERBY et J. E. DORN. — *J. Metals* (1953), 5, 324.
16. B. ANCKER et E. R. PARKER. — *J. Metals* (1954), 6, 1155.
- E. R. PARKER. — E. de Mille Campbell Lecture. Chicago (nov. 1957).
17. D. McLEAN. — Mechanical properties of metals, J. Wiley Sons, 1962.
18. O. D. SHERBY, J. L. LYTTON et J. E. DORN. — *Acta Met.* (1957), 5, 219.
- P. R. LANDON, J. L. LYTTON, L. A. SHEPARD et J. E. DORN. — *Trans. ASM* (1959), 51, 900.
19. J. J. KANTER et L. W. SPRING. — *Proc. ASTM* (1930), 30, 131.
- H. ESSER et S. ECKARDT. — *Arch. Eisenh.* (1939), 13, 209.
20. J. de LACOMBE. — *Rev. Métallurgie* (1939), 36, 178.
21. C. CRUSSARD. — *C. R. Académie des Sciences* (1957), 245, 1045.
22. C. CRUSSARD. — *Rev. Métallurgie* (1958), 55, 375.
23. C. CRUSSARD. — *Génie Chimique* (1959), 81, 65.
24. P. CHEVENARD. — *Rev. Métallurgie* (1942), 39, 321, 343.
25. P. CHEVENARD. — *J. de Physique et le Radium* (1942), 8, 3, 105.
26. P. CHEVENARD. — *Rev. Métallurgie* (1943), 40, 289.
27. C. BOULANGER et C. CRUSSARD. — *Rev. Métallurgie* (1956), 53, 715.

28. F. PHILLIPS. — *Phil. Mag.* (1905), 9, 513.
— P. CHEVENARD. — *Rev. Métallurgie* (1934), 31, 473, 517.
— H. J. TAPSELL et L. E. PROSSER. — *Engineering* (1934), 137, 212.
29. J. BOYD. — *Proc. ASTM* (1937, II), 218.
— N. F. MOTT et F. R. N. NABARRO. — Rep. Conf. Strength Solids, Bristol, 1947, *Publ. Phys. Soc.* (1948), 1.
— M. DAVIS et N. THOMPSON. — *Proc. Phys. Soc.* (1950), B 63, 847.
— O. N. WYATT. — *Proc. Phys. Soc.* (1953, B 66, 459.
— A. H. COTTRELL. — *Phil. Mag.* (1953), 44, 829.
— R. A. LAD et F. I. METZ. — *J. Mech. Phys. Solids* (1955), 4, 28.
30. C. CRUSSARD. — *Rev. Métallurgie* (1944), 41, 45.
31. C. CRUSSARD. — *Rev. Métallurgie* (1945), 42, 286, 321.
32. C. CRUSSARD. — *Rev. Métallurgie* (1946), 43, 307.
33. P. G. McVETTY. — *Mech. Eng.* (mars 1934), p. 149.
34. B. PERSOZ. — Introduction à l'étude de la rhéologie. Ed. Dunod, 1960, chap. 2.
35. P. CHEVENARD et C. CRUSSARD. — *C. R. Académie des Sciences* (1942), 214, 415; (1944), 219, 175.
36. P. CHEVENARD, C. CRUSSARD et F. AUBERTIN. — *C. R. Académie des Sciences* (1944), 219, 85.
37. C. CRUSSARD et P. CHEVENARD. — *C. R. Académie des Sciences* (1944), 219, 175.
38. C. CRUSSARD. — *C. R. Académie des Sciences* (1944), 219, 681.
39. R. E. REED-HILL et W. D. ROBERTSON. — *J. Metals* (1957), 9, 496.
40. C. CRUSSARD. — Some recent develop. in rheology. Londres, 1950, n° 5.
— C. CRUSSARD et B. JAOUËL. — *Rev. Métallurgie* (1950), 47, 589.
41. J. de LACOMDE. — *Rev. Métallurgie* (1942), 39, 180.
— J. de LACOMBE et C. CRUSSARD. — *C. R. Académie des Sciences* (1943), 217, 439.
42. J. FRIEDEL, C. BOULANGER et C. CRUSSARD. — *Acta Metallurgica* (1955), 3, 380.
43. R. TAMHANKAR, J. PLATEAU et C. CRUSSARD. — *Rev. Métallurgie* (1958), 55, 383.
44. B. GROSS. — *J. Appl. Phys.* (1947), 18, 212.
45. P. FELTHAM. — *Brit. J. Appl. Phys.* (1955), 6, 26.
46. A. KOCUENDORFER. — *Kristallallplastizität*. J. Springer.
47. N. F. MOTT et F. R. N. NABARRO. — Rep. Conf. Strength Solids. Bristol 1947, 1. *Publ. Phys. Soc.*, 1948.
48. J. MURRY. — Communication privée
49. R. TAMHANKAR. — Communication privée.
50. B. PERSOZ. — Introduction à l'étude de la rhéologie. Ed. Dunod, 1960, chap. 3 (par B. Persoz) et 5 (par J. Mandel).
51. J. GROSS. — *J. Appl. Phys.* (1947), 18, 212.
52. Y. MORILLON. — Communication privée.
53. K. TERZAGHI et R. B. PECK. — Mécanique des sols appliquée. Ed. Dunod, 1957, 76.
54. A. J. KENNEDY. — *Brit. J. Appl. Phys.* (1955), 6, 49.
55. J. MANDEL. — *C. R. Académie des Sciences* (1955), 241, 1910, et (1956), 242, 2803.
56. HOLBROOK-DULMAGE. — *Electronic Eng.* (1957), 386.
57. H. BLANK. — *Arch. Eisenh.* (1958), 29, 30.
58. P. TAUBERT. — Abh. Dtsch. Akad. Wissensch. Berlin Kl. Math. Phys. Tech. (1958), n° 5.
59. N. F. MOTT. — *Phil. Mag.* (1953), 44, 742..
Proc. Roy. Soc. A (1953), 220, 1.
60. M. REINER. — Rhéologie théorique. Ed. Dunod, 1955.
61. G. SAADA. — *Acta Met.* (1961), 9, 166.
62. J. ZARZYCKI et R. MEZARD. — *C. R. Académie des Sciences* (1962), 254, 1755, et communication à l'Ass. Franç. Cristallographie (7 novembre 1962).

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

L'effet Cottrell

Vu et approuvé :

Paris, le 12 février 1963

Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE

